NUOVA DIDATTICA

L'articolo raccoglie le tre relazioni, presentate, nel corso dell'anno scolastico 1967-68, dal prof. Lamberto Morelli al Capo d'Istituto ad illustrazione dei contenuti e dei criteri didattici del suo insegnamento e alcuni giudizi formulati dagli alunni, alla fine dell'anno scolastico, sull'uso del questionario.

I RELAZIONE

Contenuto della relazione:

Obbiettivi della sperimentazione
Esempi di questionari
Caratteristiche del questionario

OBIETTIVI DELLA SPERIMENTAZIONE

Gli sviluppi del pensiero matematico, gli studi psicologici sull'apprendimento della matematica, le nuove esigenze culturali e spirituali dei giovani inducono ad aggiornamenti non solo nei programmi ma anche nei criteri didattici dell'insegnamento.

Le innovazioni nei criteri didattici possono essere molte e vanno dall'introduzione di sussidi didattici: materiale strutturato, film, filmine, ecc. alla lezione non più tenuta in modo cattedratico con ripetizione o modesto ampliamento dei contenuti del testo, ma concepita come incontro tra colui che guida e coloro che ricercano.

Aggiornamenti possono aversi nei mezzi di valutazione con l'introduzione di nuove prove o con il rinnovamento, nella forma o nel contenuto, dei mezzi attuali.

Nel tentativo di migliorare il mio insegnamento ho introdotto nel presente anno scolastico innovazioni che, per il loro carattere di originalità, hanno assunto un aspetto sperimentale. Per evitare che la numerosità delle innovazioni avesse potuto falsare il reale valore di ognuna, mi sono limitato sostanzialmente a questo:

1 — Sviluppo del carattere storico-culturale della matematica, limitato essenzialmente alla classe quinta, con la trattazione di argomenti riguardanti i mutamenti del pensiero matematico.

2 — Enucleazione di alcuni concetti fondamentali e conse-

guente impostazione di un programma che ne faccia dei centri di studio.

La ricerca e l'esame di questi concetti base permettono degli sviluppi contemporanei di argomenti tradizionali e consentono una esposizione della materia più rispondente agli interessi dei giovani.

3 — Introduzione di questionari ad integrazione delle interrogazioni.

Attualmente, dopo meno di un trimestre, sono solamente in grado di esporre alcuni risultati sull'uso del questionario come mezzo di valutazione.

ESEMPI DI QUESTIONARI

Riporto tre questionari ad illustrazione della forma e del contenuto che essi assumono.

Questionario assegnato il 30 Ottobre 1967 alla classe terza.

Gruppo I

Individua tra questi luoghi geometrici quelli che sono formati da una sola retta:

1 Luogo dei punti equidistanti da un punto assegnato
2 Luogo dei punti del piano equidistanti da due punti assegnati
3 Luogo dei punti del piano equidistanti da due rette parallele
4 Luogo dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti
5 Luogo dei punti del piano le cui distanze da due rette incidenti stanno in un rapporto dato

Gruppo II

Indica quali di queste figure geometriche possono facilmente definirsi come luoghi geometrici:

1 La bisettrice di un angolo
2 La retta passante per due punti
3 Due rette perpendicolari
4 La circonferenza
5 Un piano perpendicolare ad una retta in un punto.

Gruppo III

Segna dei sottoindicati luoghi geometrici quelli che sono circonferenze:

1 Luogo dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti
2 Luogo dei punti del piano da cui un dato segmento è visto sotto un angolo retto.

3 Luogo dei punti del piano le cui distanze da due punti hanno un dato rapporto
4 Luogo dei punti del piano per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze da due dati punti
5 Luogo dei punti del piano da cui un dato segmento è visto sotto un angolo non retto.

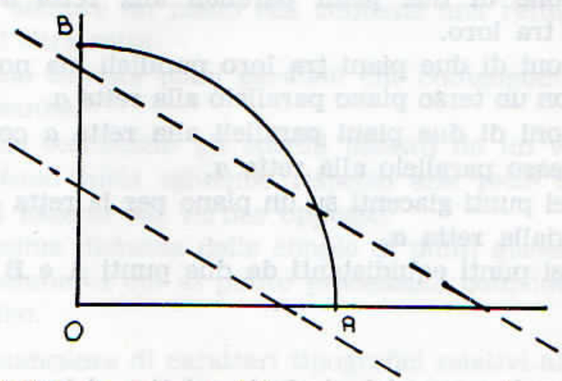
Gruppo IV

Individua tra gli insiemi sottoindicati quelli che non sono luoghi geometrici perchè in essi fa difetto la condizione di necessarietà:

1 L'insieme dei punti equidistanti dai lati di un triangolo è l'incentro del triangolo.
2 Dai punti di un arco di circonferenza avente per estremi due punti è possibile vedere il segmento che ha per estremi i due punti sotto un angolo costante.
3 I punti della bisettrice di uno degli angoli formati da due rette sono equidistanti dalle due rette.
4 I punti comuni a due circonferenze di centro A e B e raggio rispettivamente l'uno il doppio dell'altro hanno "due" come rapporto delle distanze da A e B.
5 I punti della bisettrice di una striscia sono equidistanti dai lati della striscia.

Gruppo V

Si abbia il quadrante di cerchio OAB di raggio r e un fascio di rette tali che i segmenti con estremo in O generati sulla semiretta OA siano doppi dei corrispondenti segmenti generati su OB.



Se k indica la misura del segmento generico generato su OA, individua gli intervalli di k che soddisfano le condizioni sottoindicate:

Intervallo nel quale deve variare k perché si abbia una sola intersezione con l'arco AB		Intervallo nel quale deve variare k perché si abbia due intersezioni con l'arco AB	
1	0; r	1	0; 2r
2	r; 2r	2	2r; r rad. quadrata di 5
3	0; 2r	3	0; r rad. quadrata di 5

Questionario assegnato il 23 Ottobre 1967 alla classe quarta.

Gruppo I

Rifletti e segna le proposizioni che ritieni esatte:

1 Si può definire una sfera tanto grande da contenere tutto lo spazio.
2 Si può definire una sfera tanto piccola da contenere un numero limitato di punti.
3 Un piano che divide lo spazio in due semispazi viene spostato parallelamente a se stesso. I semispazi che si originano sono sempre tra loro uguali.
4 Abbiamo dimostrato che un segmento che unisce due punti di semispazi opposti ha un punto comune col piano origine.
5 Perché una retta sia contenuta in un semispazio occorre che passi per un suo punto e sia parallela al piano origine del semipiano.

Gruppo II

Individua in quali casi il risultato delle operazioni dà luogo a rette parallele alla retta a:

1 Intersezione di due piani paralleli alla retta a ma non paralleli tra loro.
2 Intersezioni di due piani tra loro paralleli ma non paralleli ad a con un terzo piano parallelo alla retta a.
3 Intersezioni di due piani paralleli alla retta a con un piano anch'esso parallelo alla retta a.
4 Luogo dei punti giacenti su un piano per la retta a ed equidistanti dalla retta a.
5 Luogo dei punti equidistanti da due punti A e B della retta a.

Gruppo III

Individua le proposizioni giuste relative al luogo dei punti medi dei segmenti che vanno da un punto P ai punti di un piano α non passante per P.

1 Il luogo è un piano perpendicolare ad α e passante per P.
2 Il luogo è un piano parallelo ad α e passante per P.
3 Il luogo è un piano parallelo ad α che dimezza il segmento di perpendicolare condotta dal punto al piano.
4 Il luogo è la sfera di centro P e tangente ad α.
5 Il luogo coincide con il luogo dei punti equidistanti da α e dal piano β parallelo ad α per P.

Gruppo IV

Da un punto P di una retta r si conduce una retta perpendicolare ad r. Da un punto generico Q di questa retta (che possiamo indicare con s) se ne conduce un'altra perpendicolare ad essa. Questa seconda perpendicolare (indichiamola con t) è perpendicolare al piano individuato dalle rette r ed s.

1 La tesi è falsa se P coincide con Q.
2 La giustezza della tesi è indipendente dalle mutue posizioni di P. e Q.
3 La tesi è sempre vera indipendentemente dai punti P e Q.
4 La tesi è vera ma in certi casi particolari.
5 Per la verità della tesi occorre che le rette t ed s giacciono sullo stesso piano.

Gruppo V

Individua tra le seguenti proposizioni sulle rette sghembe quelle che ritieni giuste.

1 Le rette sghembe sono un caso particolare delle rette parallele.
2 Esiste sempre un piano che contiene una retta ed è parallelo all'altra retta.
3 Esistono sempre piani paralleli che contengono le due rette sghembe.
4 Le rette contenenti gli spigoli uscenti da un vertice di un cubo sono tutte sghembe rispetto alle rette conteneti gli spigoli uscenti dal vertice opposto.
5 La minima distanza delle coppie di punti giacenti sulle rette sghembe di cui al punto precedente coincide con il lato del cubo.

Per mancanza di caratteri tipografici relativi al simbolismo matematico, ho sostituito il Questionario dato il 19 Ottobre 1967 alla classe quinta con un altro assegnato nel terzo trimestre.

Gruppo I

In quali di questi problemi si ha un'unica soluzione?

1 Risoluzione di una equazione trigonometrica non impossibile.
2 Determinazione del logaritmo in base *e* di un numero positivo.
3 Derivazione da una funzione nei punti in cui questa operazione sia possibile.
4 Ricerca delle funzioni primitive di una funzione quando questa sia continua.
5 Integrazione definita entro due estremi fissi nel caso che la funzione sia continua.

Gruppo II

Indica le proposizioni giuste.

1 Una funzione derivabile in un punto è in quel punto continua.
2 Non è necessario che una funzione sia derivabile per essere integrabile.
3 L'integrale della somma di due funzioni è uguale alla somma degli integrali delle due funzioni.
4 L'integrale del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto degli integrali delle due funzioni.
5 Le funzioni primitive di due funzioni che differiscono per una costante, sono eguali.

Gruppo III

Di queste proposizioni relative alle funzioni primitive. segna quelle giuste:

1 E' possibile, calcolata la funzione primitiva di una certa funzione, determinare le altre funzioni primitive.
2 La funzione integrale è una funzione primitiva.
3 La differenza tra i valori assunti da una funzione primitiva di una funzione f(x) in *b* e *a* dà l'integrale definito della f(x) tra *a* e *b*.
4 Condizione necessaria perché esista la funzione primitiva di una funzione f(x) è che la f(x) sia derivabile.
5 Se il rapporto di due funzioni è due, tale è anche il rapporto delle loro funzioni primitive.

Gruppo IV

Ricerca le proposizioni giuste tra le seguenti:

1 La funzione integrale di una funzione continua f(x), calco-

lata tra l'estremo fisso a e l'estremo variabile x, non è unica.

2 Anche se una funzione non è continua, la sua funzione integrale lo è .

3 La derivata dalla funzione integrale è la funzione integranda.

4 La funzione integrale si può interpretare come l'area di una particolare porzione di piano.

5 La funzione integrale della f(x) è l'integrale definito della f(x) tra un estremo fisso e un estremo variabile x.

Gruppo V

Dei seguenti quesiti riguardanti il concetto d'integrale definito, segna quelli giusti.

1 L'integrale definito, come espressione di un'area, non può mai essere negativo.

2 L'integrale definito di una funzione è l'elemento di separazione delle classi dei numeri che rappresentano rispettivamente le somme integrali per difetto e le somme integrali per eccesso.

3 Per calcolare l'integrale definito di una funzione non occorre necessariamente ricorrere all'integrale indefinito di essa.

4 Se si scambiano gli estremi d'integrazione, il valore dell'integrale definito cambia di segno.

5 Gli integrali definiti, calcolati tra gli stessi estremi, di due funzioni che differiscono per una costante sono eguali.

CARATTERISTICHE DEL QUESTIONARIO

Generalmente il questionario contiene cinque gruppi di domande, ogni gruppo contiene a sua volta cinque quesiti. Complessivamente si richiede quindi la risposta a venticinque quesiti.

Il questionario è formulato in modo da avere per oggetto un determinato argomento o un gruppo omogeneo di argomenti. Seguendo questo criterio ho formulato questionari aventi per oggetto: rette e piani nello spazio, luoghi geometrici, funzioni continue, ecc.

Le domande del questionario sono ciclostilate su fogli che vengono consegnati agli alunni; ciò al fine di ridurre possibili motivi di confusione o errate interpretazioni, oltre a quello di ottenere l'innegabile vantaggio del risparmio di tempo.

Il tempo assegnato per le risposte è solitamente un'ora ma il tempo giusto, dato soprattutto dalle possibilità di concentrazione degli alunni, è di 45 minuti. Personalmente assegno volentieri altri 15 minuti per evitare la sensazione della limitatezza del tempo a disposizione, impressione che tanto negativamente opera negli alunni più emotivi.

L'esame delle risposte consente innanzi tutto un giudizio complessivo sull'assimilazione degli argomenti oggetto del questionario. I giovani infatti che non conoscono un argomento, o non sono su di esso sicuri, generalmente omettono di dare una risposta.

Si potrebbe pensare, in un primo istante, che sia più vantaggioso mettere delle risposte a caso che non rispondere. Ma non è così. Infatti si risponde al quesito ponendo o no un segno vicino ad esso, quindi anche chi non segna risponde in una certa maniera. Si capisce allora che non conoscendo l'argomento è completamente inutile segnare un quesito dato che l'assenza di segno potrebbe essere altrettanto giusta.

Il questionario pone inoltre in evidenza eventuali concetti poco chiari e dà preziose indicazioni sulle capacità di intuizione e di orientamento degli alunni.

La compilazione dei quesiti richiede molta attenzione; infatti l'utilità di questo mezzo d'indagine è strettamente legata alla loro formulazione. Così un quesito incompleto o mal formulato non consente una risposta univoca.

Alcuni quesiti colgono le varie fasi dello sviluppo logico di un argomento, altri richiedono agli alunni una certa astrazione o la riflessione su una serie di concatenazioni logiche.

Un elemento essenziale per la riuscita della prova è la sorveglianza. Copiare o suggerire è estremamente facile in questo caso. Se non si ha un'aula adatta, l'insegnante è costretto ad un'assistenza rigorosa ed ininterrotta.

Tra i vantaggi ricavabili dall'uso del questionario, oltre quelli accennati, vi è quello di contribuire alla valutazione degli alunni e la facilità del controllo dei risultati.

Ritengo le interrogazioni insopprimibili, ma spesso esse sono fatte unicamente per giustificare un secondo e terzo voto e avvengono allora in un ambiente alquanto annoiato e disinteressato creato soprattutto dagli alunni che si ritengono al di fuori della schiera degli esaminandi. Il questionario è invece un elemento di valutazione comune, contemporaneo e rapido.

I risultati dei questionari sono da me inclusi tra le valutazioni orali essendo un insieme di quesiti a cui si risponde ponendo o no un segno; in ciò l'elemento grafico è assolutamente accidentale.

Con il risultato di due o tre questionari e una o due interrogazioni credo si hanno elementi più che sufficienti per la valutazione trimestrale di un alunno. La facilità di correzione del questionario consente inoltre di comunicare subito il risultato agli alunni e di accertare nel contempo la preparazione della classe.

Tests, prove scritte e questionari

Voglio accostare questi tre mezzi d'indagine per ricercare, seppur sommariamente, gli elementi comuni e quelli che invece li caratterizzano.

L'uso di "tests" per valutazioni attitudinali, quale mezzo d'indagine della personalità, quale ausilio alla ricerca dei caratteri psichici è ormai ampiamente diffuso anche in Italia.

Il test è una prova a cui è sottoposto il candidato od il paziente. Dall'esame delle risposte si risale, attraverso induzioni logiche o rilevazioni statistiche. ai caratteri dell'esaminato. A volte ai quesiti si risponde con un sì o con un no, ma i tests generalmente, mettono a disposizione dell'intervistato una vasta gamma di risposte o richiedono di tracciare grafici o addirittura consistono in prove pratiche.

Varie sono le cause che determinano l'insuccesso di un test: risposte non veritiere, eccezione del caso in esame dalla norma, influenza di cause non controllabili, ecc. Tuttavia, nonostante le numerose cause che possono falsarne i risultati, i tests rimangono, se opportunatamente utilizzati, dei potenti mezzi d'indagine e i numerosi successi, con essi conseguiti in tanti e svariati campi, lo confermano.

Il contenuto delle prove scritte, mi riferisco a quelle di matematica, consiste, nella maggior parte dei casi, in esercizi, problemi o esposizioni di particolari argomenti. Gli alunli sostengono la prova in un tempo che è generalmente di una o due ore, eccezionalmente il tempo concesso è maggiore.

A seconda la natura delle prove diversificano di molto le indicazioni che si possono trarre da esse. Le prove che richiedono analisi di questioni e impongono considerazioni logiche senza l'uso di pesanti tecnicismi si prestano bene ad una valutazione delle capacità di analisi e logiche degli alunni. Le prove invece che richiedono la risoluzione di esercizi hanno molto delle caratteristiche dei "tests" in quanto esse sono finalizzate a dare indicazioni sul grado di praticità raggiunto e non consentono un apporto personale dell'alunno oltre quello dell'applicazione delle regole. In queste prove il tempo assegnato per la loro esecuzione ha un ruolo importante perché la praticità nel calcolo si rileva anche dal tempo impiegato nella risoluzione dell'esercizio.

Nella vasta gamma di aspetti che può assumere la prova scritta, il carattere che più le è proprio è quello di una composizione matematica.

Le fasi attraverso cui si sviluppa questa composizione sono l'analisi della situazione ipotizzata dal testo, la schematizzazione del comportamento dei vari componenti per l'introduzione dell'algoritmo matematico, la discussione dei risultati, l'analisi delle condizioni e dei limiti di validità delle soluzioni.

I questionari sono dei veri e propri "tests". Si potrebbero chiamare tests matematici. Tengo però a conservare il termine di questionari perché hanno delle particolarità e delle finalità che in un certo senso li caratterizzano.

Le particolarità sono nella natura di quesiti: il questionario comprende più questioni che trattano dello stesso argomento o di argomenti strettamente attinenti. I quesiti inoltre si riferiscono ad argomenti oggetto di studio a cui è già stata data una risposta o che ad essa gli alunni possono facilmente giungere. Scopo costante del questionario è il controllo della comprensione dei concetti, delle capacità di analisi e di deduzione, del grado di preparazione degli alunni. Infine nel questionario cadono molte cause che nei "tests" sono all'origine di errori e di imprecisioni.

II RELAZIONE

Contenuto della relazione:

Principili informatori dei criteri didattici
Un nuovo sviluppo della discussione di una equazione parametrica
Generalizzazione dell'uso della parabola fissa nella discussione delle equazioni parametriche

PRINCIPI INFORMATORI DEI CRITERI DIDATTICI

I concetti sviluppati nelle matematiche si trovano, sotto aspetti diversi, nel campo di esperienza dei giovani.

Porto alcuni esempi per chiarire e parzialmente comprovare l'asserzione precedente.

Il principio di corrispondenza è attuato dal bambino fin da quando indica oggetti diversi prima con suoni diversi e successivamente con nomi diversi. Anche la corrispondenza biunivoca o no è conosciuta dal bambino. Ogni bambino ha la sua mamma, ma la mamma può avere più bambini (corrispondenza non biunivoca); ogni bambino ha un nome, un cognome ed eventualmente un'altro attributo che lo individua in una comunità nel senso che quei caratteri sono propri, esclusivi del bambino (corrispondenza biunivoca).

Quando un ragazzo si reca ad acquistare dei pacchetti di figurine, sa bene che vi è proporzionalità tra il numero dei pacchetti acquistati ed il costo di essi. Questo è un esempio di quella che in matematica si designa col nome di proporzionalità diretta. Anche la proporzionalità inversa è sperimentata dai ragazzi e ciò avviene, per esempio, quando uno di essi deve dividere una somma tra più compagni e la parte spettante ad ognuno decresce all'aumentare di essi.

I giovani discutono volentieri delle caratteristiche delle auto e in particolare delle loro velocità. Consultano facilmente le cartine altimetriche dei percorsi e sanno calcolare la pendenza dei vari tratti di strada. Usano quindi spontaneamente delle nozioni di velocità e di pendenza anche se in esse sono impliciti i concetti di rapporto incrementale e di derivata.

Gli esempi potrebbero continuare ma quelli riportati credo siano sufficienti per chiarire quello che intendo dire scrivendo che i concetti matematici si trovano nel campo d'esperienza dei giovani. Volendo da ciò ricavarne una norma didattica si potrebbe dire che i concetti non si debbono introdurre ma invece si possono facilmente estrarre dalle conoscenze dei giovani.

Senza voler ora entrare nel merito della natura della matematica credo sia una cosa acclarata che le tecniche che essa sviluppa sono inutili se non si conoscono le condizioni che le generano e le permettono, e non si comprendono le circostanze che ne consentono la loro applicazione. Ciò porta da un lato a tenere conto della conoscenza sincretica dei concetti posseduta dai giovani e dall'altro a curare la piena comprensione degli stessi attraverso una loro accurata analisi.

Questo insegnamento volto prevalentemente all'analisi e all'approfondimento dei concetti accentua il carattere formativo della matematica, ma richiede una revisione dei criteri di sviluppo del programma.

Concetti base e ripartizione del programma.

Il principio che tutti i concetti sono impliciti nelle conoscenze dei giovani permette di limitare l'analisi e lo studio ad un gruppo di essi che ho chiamato concetti base.

I concetti base sono quelli che per la loro importanza o per la poliedricità dei loro aspetti o per la ricchezza delle applicazioni ho ritenuto fondamentali per l'apprendimento della matematica.

Essi sono: l'aspetto discreto degli elementi (o granularità), le grandezze e la loro continuità, l'eguaglianza, le corrispondenze e la continuità di esse, la nozione di ordine, il carattere d'incertezza.

In questa impostazione la ripartizione, nelle varie classi, degli argomenti è la seguente:

Classe 3ª

Presentazione delle figure geometriche
Argomenti della teoria dei numeri
Il calcolo combinatorio

Grandezze e continuità delle grandezze
Le classi dei segmenti e degli angoli
Le sezioni dei numeri razionali e i numeri reali
La misura delle grandezze

L'eguaglianza
Eguaglianza come sovrapponibilità
Eguaglianza come equiestenzione
Criteri di verifica dell'equiestensione
L'eguaglianza in algebra: confronto di numeri,

confronto di espressioni algebriche.
Le equazioni e i sistemi di equazioni algebriche
Le diseguaglianze e le disequazioni.

Classe 4ª

Corrispondenza e continuità della corrispondenza
Corrispondenza tra le grandezze e le loro misure
Corrispondenza tra insiemi finiti
Corrispondenza tra insiemi infiniti
Le successioni
Le funzioni
Il riferimento cartesiano e il grafico delle funzioni
Corrispondenza tra le posizioni delle radici rispetto ad uno o più numeri dati e i valori del parametro
Le trasformazioni elementari: l'identità, le simmetrie centrali, le rotazioni, l'omotetia e la similitudine
I limiti delle funzioni come corrispondenza tra intervalli
Nozione di ordinamento
Teoria dei vettori
Elementi di trigonometria piana

Classe 5ª

Eventi aleatori
Probabilità e frequenze
Problema delle prove ripetute
Legge degli errori di osservazione

UN NUOVO SVILUPPO DELLA DISCUSSIONE DI UNA EQUAZIONE PARAMETRICA

Espongo un procedimento di discussione di un'equazione di secondo grado che credo consenta agli alunni una migliore percezione delle varie fasi della discussione ed una più chiara interpretazione dei risultati.

Per maggiore chiarezza e sinteticità illustro il procedimento su una particolare equazione e limito l'esame delle posizioni delle radici rispetto ad un solo valore.

Sia data l'equazione parametrica

$$(m-1)x^2-2(2m-1)x-(m+1)=0$$

e si debba esaminare, al variare del parametro, le posizioni delle radici rispetto a $-1/2$

Sviluppo della discussione:

1° Si determinano i valori del parametro per cui non si hanno soluzioni.
Nel nostro caso essi sono i valori interni all'intervallo $(0,4/5)$

2° Si determinano i valori del parametro per cui $-1/2$ è interno all'intervallo delle radici.
Per essi debbono essere soddisfatte le due condizioni

(α) $\triangle > 0$
(β) $a.f(-1/2) < 0$

dove a è il coefficiente di x^2, nel nostro caso $(m-1)$.
La (β) è verificata per i valori di m interni a $1,9/5$.
I valori del parametro per cui $-1/2$ è interno all'intervallo delle radici sono quelli che verificano la (β) e che sono esterni all'intervallo precedente.

3° Si determinano i valori del parametro per cui $-1/2$ è esterno sinistro all'intervallo delle radici.
Per essi debbono essere soddisfatte le tre condizioni

(α) $\triangle > 0$
(β) $a.f(-1/2) > 0$
(γ) $\Sigma + 1/2 > 0$

La (γ) è verificata nel nostro caso dai valori di m esterni all'intervallo $(3/5,1)$.
I valori del parametro per cui $-1/2$ è esterno sinistro all'intervallo delle radici sono quelli che verificano la (γ) e che sono esterni agli intervalli determinati nei punti 1 e 2.

4° Si determinano i valori del parametro per cui $-1/2$ è esterno destro dell'intervallo delle radici.
Essi sono quelli che sono esterni agli intervalli determinati nei punti 1, 2, 3.

I risultati precedenti si possono riassumere nel seguente grafico

		$m<0$	0	$4/5$	1	$9/5$
1	Non si hanno soluzioni					
2	$-1/2$ è interno all'intervallo delle radici				$x_1<-1/2<x_2$	
3	$-1/2$ è esterno sinistro all'intervallo delle radici	$-1/2<x_1<x_2$				$-1/2<x_1<x_2$
4	$-1/2$ è esterno destro all'intervallo delle radici			$x_1<x_2<-1/2$		

Per esaminare la posizione delle radici nei caposaldi si tien conto dei valori di m per cui: $a=0$ e $f(-1/2)=0$ cioè rispettivamente di $m=1$ e $m=9/5$.

Negli altri casi la posizione delle radici è facilmente deducibile dal fatto che essa varia con continuità.

Si ha così per

$$
\begin{array}{ll}
m=0 & -1/2<x_1=x_2 \\
m=4/5 & x_1=x_2<-1/2 \\
m=1 & x<-1/2 \\
m=9/5 & x_1=-1/2<x_2
\end{array}
$$

Posizione delle radici di un'equazione parametrica rispetto a due numeri.

Si compilano due quadri, secondo il procedimento precedente, rispettivamente per il primo e per il secondo numero. Successivamente si riporta su una retta orientata i caposaldi del primo e del secondo quadro. Per non confondere uso colori diversi per i due gruppi di caposaldi o scrivo i caposaldi del primo gruppo sopra la retta e gli altri sotto. La retta risulta divisa in intervalli in ognuno dei quali è facile, riferendosi ai quadri precedentemente compilati, stabilire la posizione delle radici rispetto ai due numeri.

GENERALIZZAZIONE DELL'USO DELLA PARABOLA FISSA NELLA DISCUSSIONE DELLE EQUAZIONI PARAMETRICHE.

Ciò che sto per esporre è una estensione del metodo della parabola fissa. al caso in cui il parametro compare in tutti i coefficienti dell'incognita dell'equazione parametrica. La sola condizione ammessa è che i coefficienti dell'incognita siano polinomi di grado non superiore al primo nel parametro.

La più generica equazione verificante l'ipotesi precedente si può sempre ricondurre alla forma:

1) $(a—ka')x^2+(b—kb')x+(c—kc')=0$

L'esposizione si riferisce al caso in cui le espressioni a ed a' sono diverse da zero.

Osservazioni su un fascio di parabole

All'illustrazione del procedimento è opportuno premettere uno studio della funzione (2) $y=k(a'x^2+b'x+c')$ dove k è un parametro arbitrario. Al variare di k la (2) rappresenta una famiglia di parabole. Per $k=0$ la (2) si riduce all'asse delle ascisse.

Distinguo tre casi:

$b'^2—4a'c'>0$

$b'^2—4a'c'=0$

$b'^2—4a'c'<0$

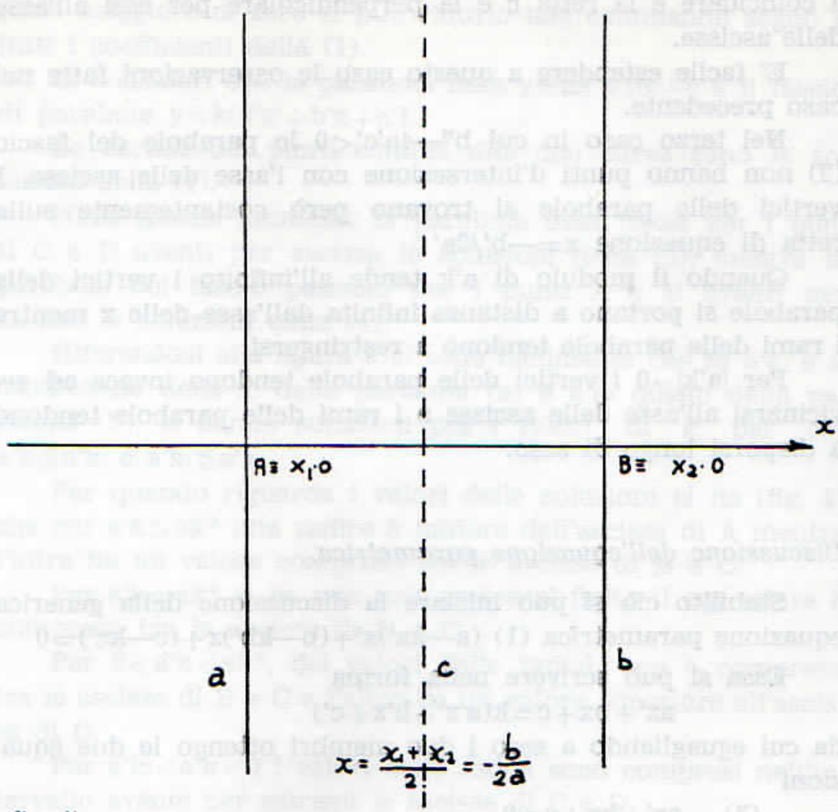
Nel primo caso le parabole generiche della famiglia $y=k(a'x^2+b'x+c')$ hanno due punti d'intersezione con l'asse x. Questi due punti sono comuni a tutte le parabole della famiglia e le loro ascisse, x_1 e x_2, sono date dalle radici dell'equazione $a'x^2+b'x+c'=0$

I vertici delle parabole della famiglia si trovano sulla retta *c* e quando il modulo di a'k' tende all'infinito essi si portano a distanza infinita dall'asse delle x, mentre i rami delle parabole tendono a restringersi ed a confondersi con le due rette *a* e *b* (fig. 1).

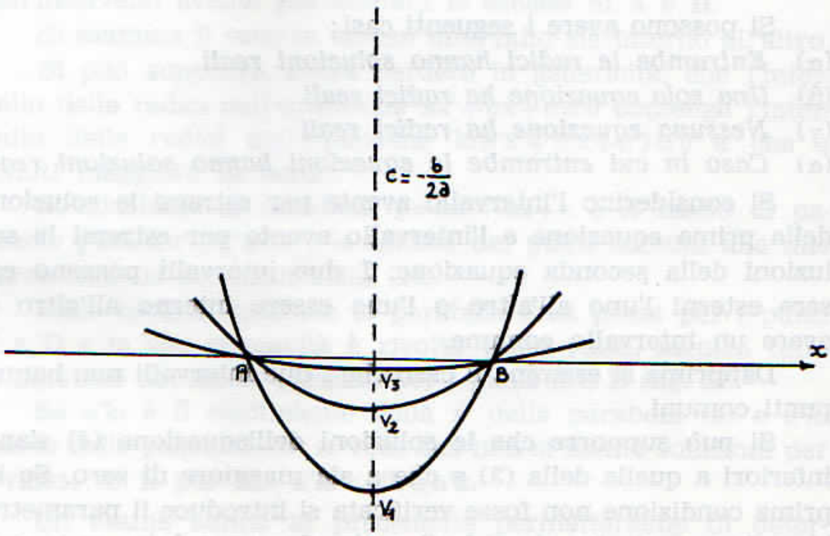
Per $|a'k|\to 0$ i vertici delle parabole tendono ad avvicinarsi all'asse delle ascisse e i rami delle parabole tendono a disporsi lungo di esso.

La figura 2 illustra le posizioni assunte dalle parabole per valori piccoli e positivi di a'k. Si osservi che i vertici delle parabole si trovano sempre sulla retta *c*.

Nel secondo caso in cui $b'^2—4a'c'=0$ i punti A e B vengono


x
A ≡ $x_1 \cdot 0$
B ≡ $x_2 \cdot 0$
a
c
b
$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

(fig. 1)


$c = -\frac{b}{2a}$
x
A
B
V_3
V_2
V_1

(fig. 2)

a coincidere e la retta *c* è la perpendicolare per essi all'asse delle ascisse.

E' facile estendere a questo caso le osservazioni fatte nel caso precedente.

Nel terzo caso in cui $b'^2-4a'c'<0$ le parabole del fascio (2) non hanno punti d'intersezione con l'asse delle ascisse. I vertici delle parabole si trovano però costantemente sulla retta di equazione $x=-b'/2a'$

Quando il modulo di a'k tende all'infinito i vertici delle parabole si portano a distanza infinita dall'asse delle x mentre i rami delle parabole tendono a restringersi.

Per $|a'k|\to 0$ i vertici delle parabole tendono invece ad avvicinarsi all'asse delle ascisse e i rami delle parabole tendono a disporsi lungo di esso.

Discussione dell'equazione parametrica.

Stabilito ciò si può iniziare la discussione della generica equazione parametrica (1) $(a-ka')x^2+(b-kb')x+(c-kc')=0$

Essa si può scrivere nella forma

$$ax^2+bx+c=k(a'x^2+b'x+c')$$

da cui eguagliando a zero i due membri ottengo le due equazioni

(3) $ax^2+bx+c=0$

(4) $k(a'x^2+b'x+c')=0$

Si possono avere i seguenti casi:

(α) *Entrambe le radici hanno soluzioni reali*

(β) *Una sola equazione ha radici reali*

(γ) *Nessuna equazione ha radici reali*

(α) *Caso in cui entrambe le equazioni hanno soluzioni reali*

Si considerino l'intervallo avente per estremi le soluzioni della prima equazione e l'intervallo avente per estremi le soluzioni della seconda equazione. I due intervalli possono essere esterni l'uno all'altro o l'uno essere interno all'altro o avere un intervallo comune.

Dapprima si esamina il caso che i due intervalli non hanno punti comuni.

Si può supporre che le soluzioni dell'equazione (4) siano inferiori a quelle della (3) e che a sia maggiore di zero. Se la prima condizione non fosse verificata si introduce il parametro $k'=1/k$ e ci si riconduce facilmente al caso voluto; se a non fosse maggiore di zero si può ridurlo tale cambiando segno a tutti i coefficienti della (1).

Si consideri ora la parabola fissa $y=ax^2+bx+c$ e il fascio di parabole $y=k(a'x^2+b'x+c')$.

Le ascisse dei punti comuni alle due curve sono le soluzioni della (1).

Nelle ipotesi ammesse la parabola fissa passa per i punti C e D aventi per ascissa le soluzioni della (3), mentre le parabole del fascio passano per i punti A e B aventi per ascisse le soluzioni della (4).

Riferendosi alla figura 3 si vede facilmente che se $a'k_1$ è il coefficiente della x^2 della parabola (a) e $a'k_2$ quello della parabola (b), si hanno soluzioni per i valori di k per cui $a'k \leqq a'k_1$ e $a'k_2 \leqq a'k$

Per quando riguarda i valori delle soluzioni si ha (fig. 4) che per $a'k > ak^*$ una radice è minore dell'ascissa di A mentre l'altra ha un valore compreso tra le ascisse di B e C.

Per $a'k = ak^*$ si ha una sola radice al finito il cui valore è compreso tra le ascisse di B e C.

Per $0 < a'k < ak^*$, dei valori delle radici, uno è compreso tra le ascisse di B e C e l'altro ha un valore superiore all'ascissa di D.

Per $a'k_2 < a'k < 0$ i valori delle radici sono compresi nell'intervallo avente per estremi le ascisse di C e D.

Per $a'k < a'k_1$ i valori delle radici sono entrambi compresi nell'intervallo avente per estremi le ascisse di A e B.

Si esamina il caso in cui un intervallo sia interno all'altro.

Si può supporre. senza perdere in genericità, che l'intervallo delle radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ contenga l'intervallo delle radici dell'equazione $k(a'x^2+b'x+c')=0$ e che a risulti maggiore di zero.

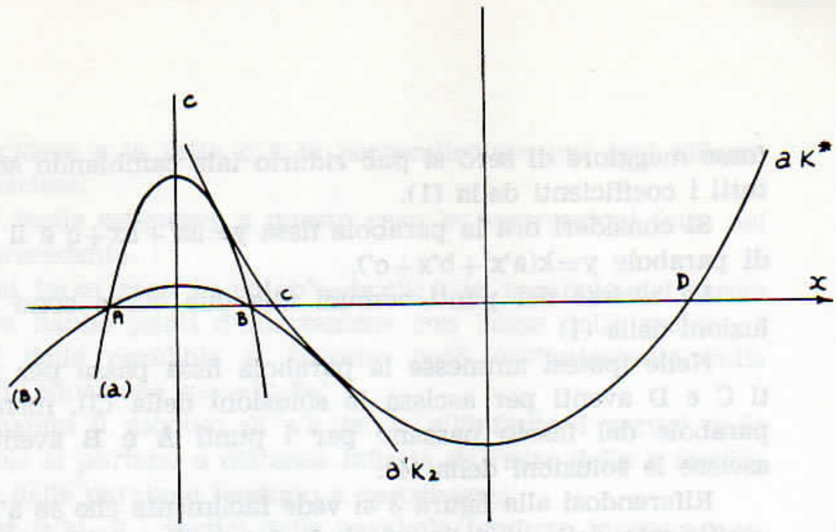
Si considera la parabola $y=ax^2+bx+c$ e il fascio di parabole $y=k(a'x^2+b'x+c')$ le ascisse dei punti comuni alle due curve sono le soluzioni della (1).

Nelle ipotesi ammesse la parabola fissa passa per i punti C e D e la sua concavità è rivolta verso l'alto, mentre tutte le parabole del fascio passano per i punti A e B (fig. 5).

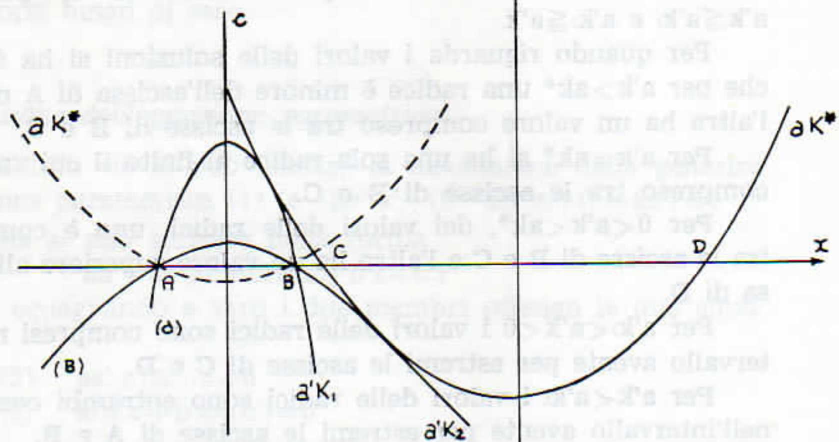
Se $a'k_1$ è il coefficiente della x^2 della parabola (a) e $a'k_2$ quello della parabola (b) si vede che non si hanno soluzioni per i valori di k per cui $a'k_1 < a'k < a'k_2$

Un esame simile al precedente permetterebbe di determinare i valori delle soluzioni.

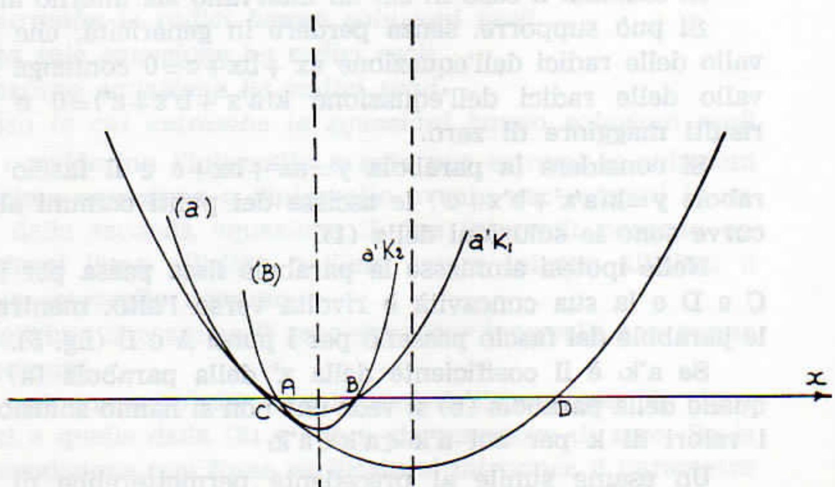
(fig. 3)



(fig. 4)



(fig. 5)



Le considerazioni precedenti applicate al caso che i due intervalli hanno una parte in comune portano a concludere che in questa ipotesi si hanno sempre soluzioni dell'equazione parametrica (fig. 6).

(β) *Una sola equazione ha soluzioni reali*

Si può supporre che sia l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ad avere radici reali e che inoltre a sia maggiore di zero. Se la prima condizione non fosse verificata basta introdurre il parametro $k'=1/k$ per ricondursi al caso voluto, se la seconda condizione non fosse verificata è sufficiente cambiare il segno ai coefficienti della (1).

In queste ipotesi la parabola fissa e le parabole del fascio tangenti ad essa hanno le posizioni indicate nella fig. 7.

Si può dedurre, ricordando che le parabole del fascio hanno costantemente il vertice sulla retta *c* e che allontanandosi il vertice dall'asse delle ascisse la concavità della parabola si restringe, che le soluzioni dell'equazione parametrica si hanno per i valori di ka' verificanti le seguenti diseguaglianze $a'k_1 \leqq ka' \leqq a'k_2$ dove $a'k_1$ è il coefficiente del termine di secondo grado della parabola del fascio che ha la concavità rivolta verso il basso mentre $a'k_2$ è il coefficiente del termine di secondo grado della parabola che ha la concavità rivolta verso l'alto. Fig. 7.

Non sarebbe difficile. anche in questo caso, esaminare il segno delle radici dell'equazione parametrica.

(γ) *Nessuna delle equazioni ha soluzioni reali.*

Supposto a, cioè il coefficiente del termine di secondo grado della parabola fissa, positivo si può impostare e svolgere la discussione nel modo usuale.

Nella figura 8 sono rappresentate la parabola fissa e le parabole del fascio tangenti ad essa. Tenendo conto del comportamento delle parabole del fascio si può facilmente dedurre che si hanno soluzioni per $a'k_1 \leqq a'k \leqq a'k_2$.

Posizioni delle radici dell'equazione parametrica rispetto ad uno o più numeri dati.

Il procedimento illustrato si può estendere all'esame della posizione delle radici dell'equazione parametrica rispetto ad uno o più numeri dati.

Per questo è necessario fissare sulla parabola fissa

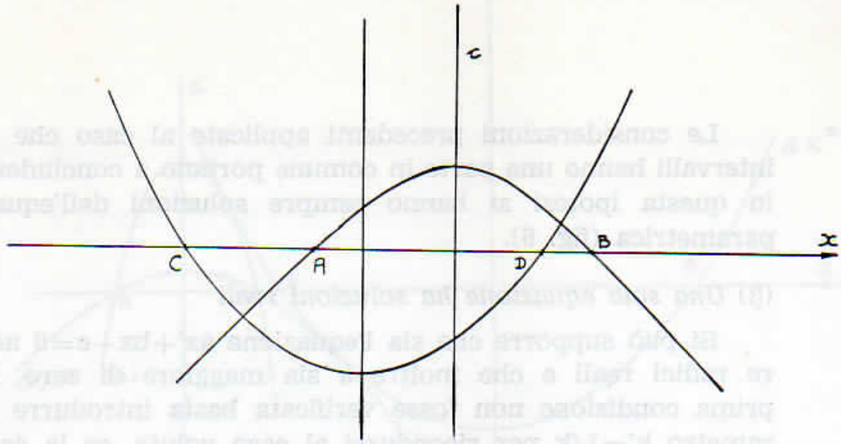
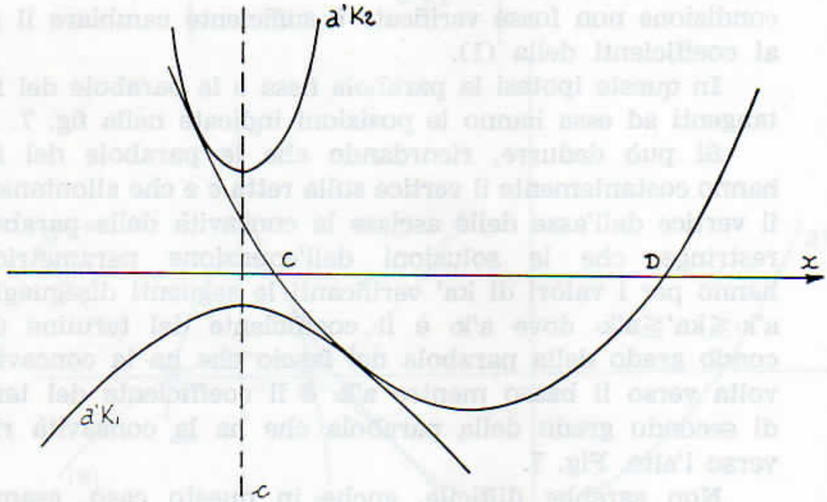
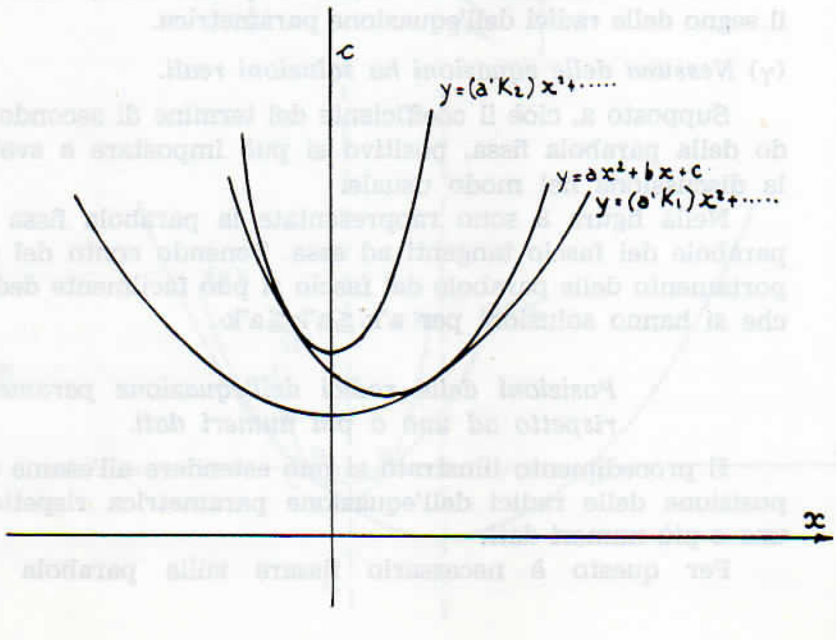


fig. (6)



(fig. 7)



(fig. 8)

$y=ax^2+bx+c$ i punti aventi per ascissa i numeri dati e considerare le parabole del fascio che passano per essi.

Nella discussione si dovrà tener poi conto di queste parabole e dei valori del parametro che le individuano. Infatti la posizione delle ascisse dei punti comuni, relativamente agli intervalli che hanno per estremi i numeri dati, dipende dalla posizione delle parabole del fascio rispetto ad esse.

Esempio di applicazione del procedimento illustrato.

Sia data l'equazione parametrica $(1+k)x^2-2(3+k)x+9=0$. Si voglia studiare le posizioni delle radici, al variare di k, rispetto ai due valori 1 e 4.

Scritta l'equazione data nella forma $x^2-6x+9=k(-x^2+2x)$ ed eguagliati a zero i due membri, si ottengono le due equazioni

$$x^2-6x+9=0; \qquad k(-x^2+2x)=0$$

Entrambe hanno soluzioni reali e gli intervalli sono esterni l'uno all'altro.

Le soluzioni dell'equazione parametrica sono le ascisse delle intersezioni della parabola fissa $y=x^2-6x+9$ con la parabola del fascio $y=k(-x^2+2x)$.

Una parabola tangente alla parabola fissa si riduce, in questo caso, all'asse x mentre l'altra ha come valore del parametro 3.

Individuati sulla parabola fissa i punti che hanno ascissa rispettivamente 1 e 4, si considerano le parabole del fascio passanti per questi punti.

Nella figura 9 esse sono indicate rispettivamente con (*A*) e (*B*) e ad esse corrispondono i valori $-1/8$ e 4 del parametro k.

Dall'esame della figura 9 si possono ricavare le seguenti conclusioni:

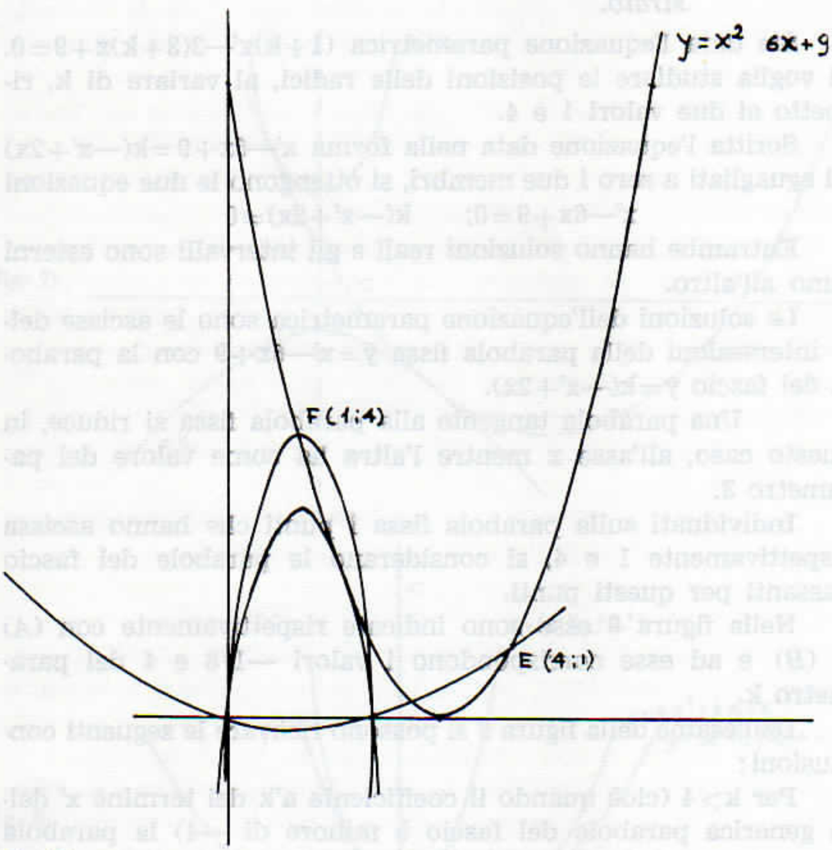
Per $k>4$ (cioè quando il coefficiente a'k del termine x^2 della generica parabola del fascio è minore di -4) la parabola fissa e le parabole del fascio hanno due intersezioni. Le ascisse di esse sono rispettivamente una minore di 1, l'altra compresa nell'intervallo (1, 4).

Per $3<k<4$ (cioè quando il coefficiente a' k del termine x^2 della generica parabola del fascio è compre tra -4 e -3) la parabola fissa e le parabole del fascio hanno due intersezioni. Le ascisse di esse sono comprese nell'intervallo (1,4).

Per $0<k<3$ (cioè per $-3<a'k=-k<0$) la parabola fissa e le parabole del fascio non hanno punti comuni.

Per $-1/8<k<0$ (cioè per $0<a'k=-k<1/8$) le ascisse dei punti comuni alla parabola fissa e alle parabole del fascio sono comprese tra 1 e 4.

Per $k<-1/8$ (cioè per $a'k=-k>1/8$) l'ascissa di uno dei punti comuni alla parabola fissa e alle parabole del fascio, è compresa nell'intervallo (1, 4).



(fig. 9)

III RELAZIONE

Contenuto della relazione:

Lettera al Preside

Cenni di calcolo vettoriale ed applicazioni alla trigonometria.

Mutamenti del pensiero matematico.

LETTERA AL PRESIDE

Ill.mo Sig. Preside,

avendo Lei manifestato l'intenzione di pubblicare le mie relazioni sull'Annuario del nostro Liceo, sento il dovere di inserire questa lettera nella mia ultima relazione. Con essa voglio esprimerLe il mio ringraziamento per il calore con cui Lei ha accolto la mia iniziativa e per il sostegno che Lei ha dato ad essa.

Dopo aver lasciato la vecchia e sperimentata didattica per procedere in altra direzione, non nego che spesso ho percepito il disappunto per il lavoro di cui mi ero gravato ed ho avvertito il rimpianto per quella via che tante volte avevo percorso. In questi momenti di incertezza una parola di incoraggiamento e il senso di stima di chi ci è vicino sono stimoli determinanti a perseverare.

Benché manchi oltre un trimestre alla fine dell'anno scolastico, posso serenamente affermare che la mia sperimentazione sta cogliendo un successo superiore alle mie aspettative. L'uso del questionario si è dimostrato ottimo come mezzo d'indagine e di valutazione. Lo studio dei fondamenti del pensiero matematico interessa vivamente gli alunni e consente loro una più ampia e profonda conoscenza della natura della matematica. Anche i criteri didattici da me adottati si dimostrano psicologicamente appropriati e danno risultati soddisfacenti. Ma per la loro completa ed esatta valutazione avrò bisogno di una più lunga sperimentazione.

Devo sottolineare che a questi risultati ha contribuito, seppure in modo indiretto, l'ambiente scolastico nel quale opero. Infatti mi trovo ad insegnare a giovani seri, sensibilizzati agli interessi culturali da un ottimo gruppo di docenti.

Nella speranza di poter completare felicemente la sperimentazione cui ho dato vita, Le rinnovo il mio ringraziamento e la mia più deferente stima

MORELLI LAMBERTO

Macerata 9 Marzo 1968

CENNI DI CALCOLO VETTORIALE ED APPLICAZIONI ALLA TRIGONOMETRIA

Appunti ciclostilati e consegnati agli alunni della classe quarta come guida allo svolgimento del programma.

1 *Segmenti orientati e vettori*

Un segmento è orientato se dei suoi estremi se ne è scelto uno come origine e l'altro come estremo del segmento stesso.

Ciò equivale a fissare un verso positivo sul segmento: quello che va dall'origine all'estremo.

Se in un segmento orientato AB, A è l'origine e B l'estremo, si indicherà tale segmento con la notazione B-A.

Per individuare un segmento orientato occorre darne l'origine. la direzione e la lunghezza.

Si dirà che due segmenti orientati sono equivalenti quando il punto di mezzo del segmento avente per estremi l'origine dell'uno e l'estremo dell'altro, coincide col punto di mezzo del segmento avente per estremi l'estremo del primo e l'origine dell'altro.

Così B-A è equivalente a D-C se il punto di mezzo del segmento AD coincide con il punto di mezzo del segmento BC.

La classe dei segmenti tra loro equivalenti dicesi vettore.

Se u è il vettore individuato dal segmento orientato B-A, cioè la classe dai segmenti equivalenti a B-A, si scrive $u$eq.B-A.

Da essa si deriva la scrittura $A+u$ eq. B interpretandola nel senso che B è il punto a cui si perviene applicando in A il vettore u e dicendo che B è la somma del punto A e del vettore u.

Siano u e v due vettori. Applicato in un punto A il vettore u e, nel punto ottenuto, il vettore v si ottiene un nuovo punto C

$$(A+u)+v \text{ eq. } C$$

Il vettore w individuato dal segmento C-A dicesi somma del vettore u e v e scrivesi:

$$w=u+v$$

La somma di due vettori è commutativa ed associativa cioè si ha

$$u+v=v+u \quad \text{e} \quad (u+v)+w=u+(v+w).$$

NOTA — Per esigenze tipografiche i vettori sono indicati con lettere corsive, l'equivalenza con il simbolo eq. ed inoltre nella notazione dei segmenti manca il tratto che sormonta l'indicazione degli estremi.

Si definisce prodotto di un numero α per un vettore u il vettore che ha la stessa direzione di u, lunghezza α volte quella di u e lo stesso verso o verso contrario secondo che sia α positivo o negativo.

Si ricordano le seguenti proprietà:

$$\beta(\alpha u)=(\alpha\beta)u$$
$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$$
$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$$

2 *Angolo di due vettori*

Applicati i due vettori u e v in un punto generico A, si definisce angolo di u e v, l'angolo convesso formato dalle due semirette di origine A contenenti i due vettori dati.

Si indica questo angolo con la notazione (u,v).

Per la definizione data risulta $(u,v)=(v,u)$.

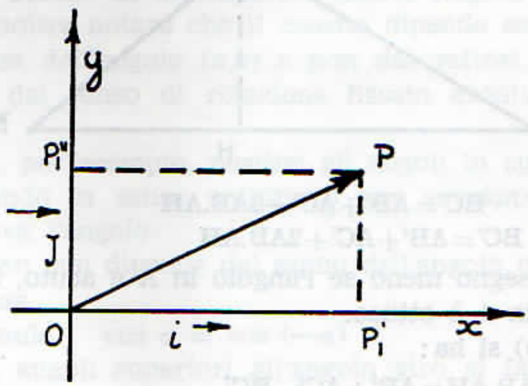
3 *Componenti di un vettore secondo due direzioni ortogonali*

Siano i e j due vettori unitari tra loro ortogonali e tali che, secondo l'orientamento fissato nel loro piano, la misura dell'angolo (i,j) sia $\pi/2$.

E' possibile esprimere tutti i vettori del piano mediante la somma di due vettori paralleli rispettivamente a i e j.

Infatti dato un vettore u sia

P—O eq. u (fig. 1)



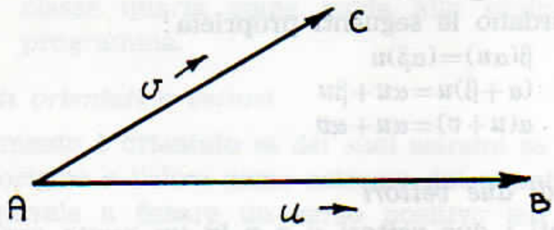
Si applichi in O i due vettori i e j e si consideri il sistema ortogonale di origine O, avente gli assi paralleli a i e j e con lo stesso verso e la stessa unità di misura fissata per la misura di i e j.

Se x ed y sono le coordinate di P si avrà

P—O eq. $(x.i + y.j)$ da cui $u=xi+y.j$.

4 *Prodotto scalare di due vettori*

Preso un punto generico A sia B eq. $A+u$ e C eq. $A+v$ (fig. 2)



Definisco prodotto scalare dei due vettori il valore dell'espressione $1/2\ (AB^2+AC^2-BC^2)$ dove AB, AC, BC sono le misure dei segmenti relativi.

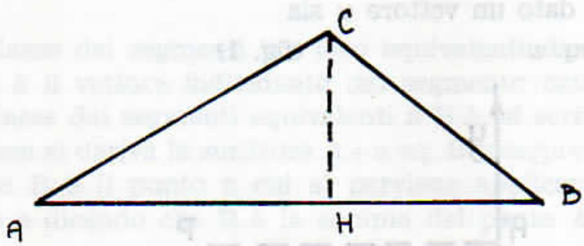
Indicando con uxv il prodotto scalare dei due vettori u e v si ha

$$\text{(a)}\quad uxv=1/2(AB^2+AC^2-BC^2)$$

Per la definizione data consegue $uxv=vxu$

Si osservi che il valore del prodotto scalare è indipendente dal punto A preso come punto di applicazione dei due vettori.

In un triangolo generico ABC (fig. 3) il teorema di Pitagora generalizzato dà:



$$\text{(b)}\quad BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AH$$
$$\text{o}\quad BC^2=AB^2+AC^2+2AB.AH$$

Vale il segno meno se l'angolo in A è acuto, il segno più se l'angolo in A è ottuso.

Dalla (b) si ha:

$$\pm 2AB.AH=AB^2+AC^2-BC^2$$

da cui (c) $\pm AB.AH=1/2(AB^2+AC^2-BC^2)$

Confrontando questa espressione con la (a) si ha che il prodotto scalare uxv è anche eguale all'espressione AB.AH presa positiva o negativa secondo che l'angolo (u,v) è acuto od ottuso.

5 *Alcune proprietà del prodotto scalare*

1 $(\alpha u) \mathrm{x} v = \alpha(u \mathrm{x} v)$

2 $(u+v) \mathrm{x} w = u \mathrm{x} w + v \mathrm{x} w$

3 $u \mathrm{x} u = u^2 = |u|^2$

Il valore numerico u^2 dicesi norma del vettore. La radice quadrata dicesi modulo del vettore. Si indica il modulo del vettore u con la notazione $|u|$.

4 $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2(u \mathrm{x} v)$

5 $(u+v) \mathrm{x} (u - v) = u^2 - v^2$

Dall'interpretazione geometrica del prodotto scalare risulta

$$|u \mathrm{x} v| \leq |u| \;.\; |v|.$$

6 *Coseno di un angolo*

Si definisce coseno dell'angolo (u,v) e lo si indica con la notazione $\cos(u,v)$ l'espressione

$$\text{(d)} \quad \cos(u,v) = \frac{u \mathrm{x} v}{|u|\;|v|} = \frac{u}{|u|} \mathrm{x} \frac{v}{|v|} \quad \left(\frac{u}{|u|} \text{ e } \frac{v}{|v|} \text{ sono vettori unitari}\right).$$

Per quanto si sa sul prodotto scalare di due vettori immediatamente si verifica che il coseno di un angolo acuto è positivo, il coseno di un angolo ottuso è negativo.

Si fa inoltre notare che il coseno dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo (u,v) e non dai vettori che lo individuano o dal senso di rotazione fissato eventualmente sul piano.

Si fissi, per esempio, positivi gli angoli in cui il lato origine, ruotando in senso antiorario per sovrapporsi all'altro lato, descrive l'angolo.

Il coseno non dipende dal segno dell'angolo ma solo dalla sua ampiezza.

In formule $\quad \cos \alpha = \cos(-\alpha)$

Per gli angoli superiori all'angolo giro si fa la seguente convenzione

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

Facilmente si deducono le seguenti relazioni:

$$\cos(2\pi - \alpha) = +\cos \alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

Si definisce seno di un angolo il coseno dell'angolo complementare:

$$\text{sen } \alpha = \cos (\pi/2 - \alpha)$$

Il seno ed il coseno si dicono funzioni circolari, l'angolo in esse indicato chiamasi argomento.

7 *Quadro di relazioni relative al senso di angoli particolari.*

$$\text{sen } (-\alpha) = \cos (\pi/2 + \alpha) = - \text{sen } \alpha$$
$$\text{sen } (\pi/2 - \alpha) = \cos [\pi/2 - (\pi/2 - \alpha)] = \cos \alpha$$
$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \cos (-\pi/2 + \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\text{sen } (\pi + \alpha) = \cos (-\pi/2 - \alpha) = - \text{sen } \alpha$$
$$\text{sen } (\pi/2 + \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

Osservazione

Si riprendano le considerazioni relative alle componenti di un vettore secondo due direzioni ortogonali e si supponga il vettore, ivi considerato, unitario.

L'ascissa x dell'estremo del vettore viene a coincidere con il coseno dell'angolo (i,u), l'ordinata y dell'estremo del vettore con il seno dell'angolo (j,u).

Le componenti del vettore unitario u sono quindi

$$i \cos (i, u) \text{ e } j \cos (j, u)$$

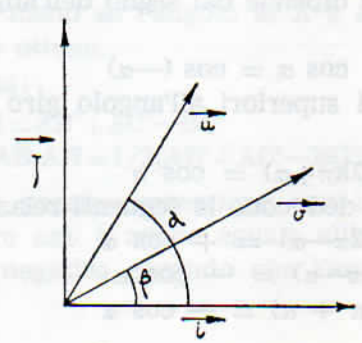
cioè si ha:

$$u = i \cos (i, u) + j \cos (j, u).$$

8 *Coseno della differenza di due angoli.*

Siano α e β i due angoli e siano i, u i vettori unitari paralleli ai lati del primo angolo e i, v i vettori unitari paralleli ai lati del secondo.

Si voglia determinare il coseno dell'angolo $\alpha - \beta$ (fig. 4)



Esprimendo il vettore v mediante i componenti paralleli a i e j si ha:

$$v = \cos\beta \,.\, i + \operatorname{sen}\beta \,.\, j$$

Esprimendo il vettore u mediante i componenti paralleli a i e j si ha:

$$u = \cos\alpha \,.\, i + \operatorname{sen}\alpha \,.\, j$$

Essendo u e v vettori unitari, il coseno dell'angolo da essi individuato coincide con il prodotto scalare $u \times v$.

$$\cos(u,v) = \cos(\alpha-\beta) = u \times v = (\cos\alpha . i + \operatorname{sen}\alpha . j) \times (\cos\beta i + \operatorname{sen}\beta . j)$$

Sviluppando l'espressione all'ultimo membro, tenendo conto delle proprietà del prodotto scalare, si ha:

$$\text{(e)} \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

9 *Formule di addizione e sottrazione.*

Si chiamano formule di addizione e sottrazione quelle che esprimono le funzioni circolari dell'argomento $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$ mediante le funzioni circolari degli argomenti α e β.

La (e) è una di queste formule.

Ricavo dalla (e) il $\cos(\alpha+\beta)$.

Si ha:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

da cui

$$\text{(f)} \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Ricavo ora il $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

Si ha:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos[\pi/2-\alpha+\beta] = \cos[(\pi/2-\alpha)+\beta]$$

Dalla (e) deduce

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)\operatorname{sen}\beta$$

da cui

$$\text{(g)} \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Infine ricavo dalla (g) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

Si ha:

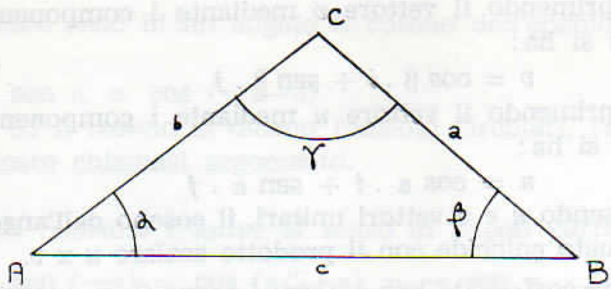
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

da cui

$$\text{(h)} \qquad \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

10 *Relazioni fra gli elementi di un triangolo.*

Supposto una volta per tutte che il verso positivo fissato sul piano sia quello antiorario, si vuole illustrare alcune relazioni che esistono tra gli elementi di un triangolo.



Sia dato il triangolo ABC (fig. 5) in cui a, b, c sono le misure dei lati e α, β, γ le misure degli angoli interni.

Per esso si ha:

$$(C-B)+(A-C)=(A-B)$$

Si moltiplichino il primo e secondo membro per A—B

$$[(C-B)+(A-C)]x(A-B)=(A-B)x(A-B)$$

$$(C-B)x(A-B)+(A-C)x(A-B)=(A-B)^2$$

Ricordando la definizione del prodotto scalare e quella del coseno si ha:

$$a\ c\cos\beta + b\ c\cos\alpha = c^2$$

da cui

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

E' facile dedurre delle relazioni analoghe anche per i lati a e b.

Si avrà così

$$\text{(i)}\qquad \begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha \end{aligned}$$

Il gruppo di formule (i) sono note sotto il nome di *teorema delle proiezioni.*

Moltiplicando i membri della prima relazione per a, quelli della seconda per —b, quelli della terza per —c e sommando si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

E' facile dedurre delle relazioni analoghe per b e c.

Si avrà così

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

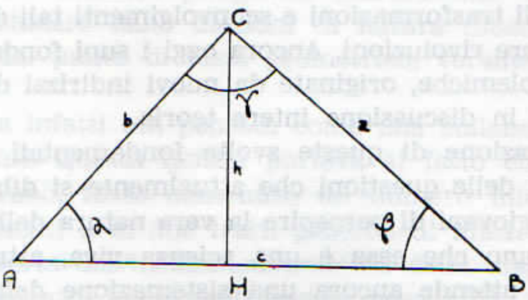
Il gruppi di formule (1) va sotto il nome di *teorema di Carnot o del coseno.*

Tenendo conto della definizione del coseno non è difficile ritrovare nelle (1) il teorema di Pitagora generalizzato da cui si è partiti per definire il prodotto scalare e quindi il coseno di un angolo.

Un altro gruppo di formule si può dedurre partendo dall'eguaglianza

$$(A-B)=(A-C)-(B-C)$$

e moltiplicando i due membri per $(H-C)$
(fig. 6)



Infatti da:

$(A-B)x(H-C)=[(A-C)-(B-C)]x(H-C)$

si ottiene

$O = (A-C)x(H-C)-(B-C)x(H-C)$

$O = b \cdot h \cos (\pi/2-\alpha) - a \cdot h \cos (\pi/2-\beta)$

da cui

$b\ h \operatorname{sen} \alpha = a\ h \operatorname{sen} \beta$.

Semplificando per h e dividendo per $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$:

$$b/\operatorname{sen} \beta = a/\operatorname{sen} \alpha$$

E' facile dedurre delle relazioni analoghe per le coppie di lati (a, c) e (b, c).

In definitiva si ottiene

(m) $a/\operatorname{sen} \alpha = b/\operatorname{sen} \beta = c/\operatorname{sen} \gamma$

Le (m) vanno sotto il nome di *teorema dei seni*.

Bibliografia.

Armando Chiellini
La matematica moderna nell'insegnamento secondario
Lib. Eredi - Virginio Veschi - Roma - L. 4.000

Autori vari
Matematica moderna nelle scuole medie superiori
Casa Editrice Pàtron - Bologna - L. 7.500

MUTAMENTI DEL PENSIERO MATEMATICO

I contenuti e i concetti della matematica hanno subito durante i secoli trasformazioni e sconvolgimenti tali da essere assimilati a vere rivoluzioni. Ancora oggi i suoi fondamenti sono scossi da polemiche, originate da nuovi indirizzi di studi, che ne mettono in discussione intere teorie.

L'illustrazione di queste svolte fondamentali e l'accenno ai contenuti delle questioni che attualmente si dibattono, permettono ai giovani di percepire la vera natura della matematica e mostrano che essa è una scienza viva, attuale, che in molte parti attende ancora una sistemazione definitiva.

Come guida a questa esposizione mi sono valso dell'ottima opera di Herbert Meschkowski "Mutamenti del pensiero matematico" tradotta dal prof. Lucio Lombardo Radice e fatta da me adottare, come testo integrativo, dagli alunni della classe quinta.

Gli argomenti scelti per questa analisi storico-filosofica dei fondamenti della matematica sono stati: la trasformazione del concetto di punto, l'introduzione delle geometrie non euclidee, la teoria degli insiemi di Cantor e le critiche ad essa sollevate dagli intuizionisti.

La trasformazione del concetto di punto.

La matematica è nata da esigenze pratiche e per millenni ha rispecchiato questo carattere concreto.

L'esattezza delle sue proposizioni era un fatto sperimentale e le astrazioni da essa operate rispecchiavano le proprietà delle figure o degli enti a cui si riferivano.

La scuola pitagorica per prima fece uso sistematico del metodo di deduzione e introdusse gli assiomi come verità prime, fondamentali. In seno alla scuola pitagorica ebbe pure luogo la prima rivoluzionaria scoperta. Fu una scoperta tanto grave da obbligare gli aderenti alla setta ad impegnarsi a non rivelarla. Narra la leggenda che quello che osò diffonderla fu scacciato dalla setta e punito dagli dei. La sua nave fu scagliata contro gli scogli ed egli perì miseramente.

Quale fu dunque questa sconvolgente scoperta?

La constatazione che non può esistere nessun segmento, per quanto piccolo, che sia contenuto un numero esatto di volte nella diagonale e nel lato del quadrato. Ciò era infatti in contraddizione con il concetto che si aveva della linea e con i principi della filosofia pitagorica sull'armonia dell'universo.

A prescindere dalle illazioni di natura filosofica, la scoperta era, dal punto di vista geometrico, veramente sconvolgente.

La linea infatti era pensata come una collana i cui grani erano i punti. Questa ipotesi portava al fatto che almeno il punto, il grano, fosse contenuto un numero intero di volte in due segmenti o in due tratti generici di linea.

La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato, impedendo questa possibilità, sovvertiva il concetto di punto e quindi l'idea di linea. Il punto perdeva la consistenza materiale e le sue dimensioni, mentre la linea veniva ad essere illimitatamente divisibile.

Tutto ciò non poteva essere accettato senza sollevare perplessità ed opposizioni ed il sofisma di Zenone, quello relativo ad Achille e alla tartaruga, ne fu una manifestazione.

Introduzione delle geometrie non euclidee

L'introduzione delle geometrie non euclidee è legata a quella lenta trasformazione del pensiero matematico che ha avuto per oggetto il concetto di verità matematica.

In ogni scienza una proposizione è vera se il suo contenuto o le conseguenze che logicamente se ne deducono hanno rispondenza con la realtà. Questo carattere di verità è stato attribuito per molti secoli anche alle proposizioni matematiche. Attualmente però la verità di una proposizione matematica non è più legata alla realtà sperimentale ma dipende esclusivamente dall'essere stata dedotta correttamente dall'insieme delle proposizioni ammesse. Questo distacco della matematica dalla realtà ha modificato, ampliandolo, il campo d'indagine della matematica, ma l'oggetto di essa non sempre risulta completamente precisato. Ecco, per esempio, due definizioni dell'essenza della matematica, la prima tratta da un articolo del prof. Fabio Conforto; l'altra dovuta al prof.

Libois dell'Università di Bruxelles. La matematica è l'insieme di tutti i possibili sistemi ipotetico-deduttivi; gli enti con cui essa opera sono elementi di natura imprecisata di uno o più insiemi, definiti soltanto dalle proprietà elencate in un sistema compatibile di postulati. La matematica è lo studio degli insiemi strutturati, degli enti definiti in questi insiemi, delle loro relazioni, delle loro trasformazioni.

A questa sconcertante rivoluzione del carattere di verità matematica si è pervenuti dall'analisi del valore logico di una proposizione, relativamente all'insieme delle proposizioni che la precedono, nell'esposizione datane da Euclide nei suoi "Elementi".

La proposizione, nota sotto il nome di postulato delle parallele, è così enunciata da Euclide: "Se una retta incontra due rette e con esse forma dalla stessa parte angoli interni la somma dei quali è inferiore a due retti, allora le due rette si incontrano, se le si prolunga dalla parte detta".

Euclide l'aveva assunta come postulato ma, forse poco convinto della sua natura, l'aveva enunciata nel corso della trattazione quando essa era diventata indispensabile e non, come gli altri postulati, all'inizio dell'opera.

Già i primi commentatori degli "Elementi" ne tentarono una dimostrazione riuscendo il più delle volte nello scopo. Ma le dimostrazioni erano ottenute ricorrendo sempre a qualche elemento intuitivo non espressamente enunciato nei postulati ammessi o da essi deducibile. In virtù del valore di verità che la geometria doveva avere ciò era lecito, ma lasciava insoddisfatti dal punto di vista logico non essendo queste dimostrazioni ricavate dai postulati ammessi.

Il matematico Klugel nel 1763 nella sua tesi di laurea ne riportò ben ottantadue. Il punto di partenza di molte dimostrazioni era quello di ammettere veri altri postulati e di negare il postulato delle parallele. Immancabilmente queste dimostrazioni conducevano a contraddizioni di natura intuitiva ma non logica. Stavano maturando le condizioni perché si percepisse il fatto che l'insieme delle proposizioni, che si deducono dai postulati introdotti da Euclide all'inizio della sua opera e dalla negazione del postulato delle parallele, ha lo stesso valore logico e quindi lo stesso grado di verità della geometria esposta da Euclide. Questo in sostanza esposero nelle loro opere il Lobacewskij ed il Bolyai.

La trasformazione del carattere di verità matematica era avvenuta: una proposizione matematica per essere vera non doveva necessariamente rispecchiare la realtà ma solo essere logicamente deducibile dalle ipotesi ammesse!

La teoria degli insiemi di Cantor e le critiche degli intuizionisti

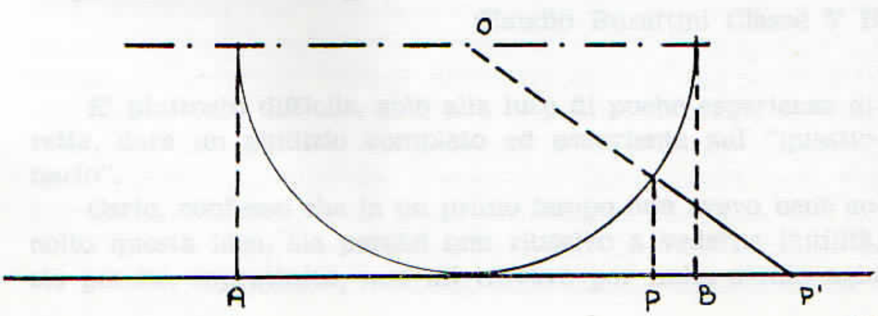
Un criterio di cui spesso ci serviamo per confrontare la numerosità di due insiemi è quello di far corrispondere ad ogni elemento del primo insieme un elemento del secondo. Se questa corrispondenza esaurisce i due insiemi diciamo che essi hanno la stessa numerosità. Se in una sala ogni spettatore è seduto e non vi sono posti liberi è naturale affermare che il numero degli spettatori è eguale al numero dei posti disponibili e ciò senza dover precisare la numerosità dei due insiemi. Il Cantor applicò questo criterio di eguaglianza, valido in modo assoluto per gli insiemi finiti, agli insiemi infiniti.

Due insiemi infiniti tali che i loro elementi possono porsi in corrispondenza biunivoca si dicono della stessa potenza.

Gli sviluppi di tale impostazione sono eccezionalmente interessanti ma nello stesso tempo sconcertanti. Così, per esempio, l'insieme dei numeri pari ha la stessa potenza dell'insieme dei numeri naturali e questo nonostante che l'insieme dei numeri pari sia parte dell'insieme dei numeri naturali. La dimostrazione di ciò è immediata: basta far corrispondere ad un qualsiasi numero naturale il numero doppio nell'insieme dei numeri pari e ad uno di questi il numero naturale eguale alla sua metà. La corrispondenza che così ne nasce mostra che i due insiemi hanno la stessa potenza.

Altro esempio di insiemi aventi la stessa potenza è quello dei numeri naturali e dell'insieme dei numeri razionali.

Anche i punti di un segmento costituiscono un insieme avente la stessa potenza dell'insieme formato dai punti di una retta. La figura mostra il modo come si può stabilire la corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento AB e l'insieme dei punti della retta r.



Un risultato che lascia perplessi, in quanto viene a sconvolgere il nostro concetto di dimensione, è che i punti di un segmento possono porsi in corrispondenza biunivoca con i punti di un quadrato avente quel segmento per lato.

Simili risultati non potevano non sollevare obiezioni. Una prima obiezione che si mosse alla teoria degli insiemi così formulata riguardava il concetto di infinito. L'infinito era per Cantor un infinito attuale, cioè Cantor considerava l'infinito come dato, in actu. Questa visione fu subito respinta dal Kronecker che nel periodo che Cantor esponeva i suoi risultati insegnava nell'Università di Berlino. Il primo lavoro fondamentale del Cantor fu pubblicato nel 1874.

Per il Kroneker esisteva solo l'infinito "potenziale", qualcosa come la possibilità di continuare a contare illimitatamente. D'altronde già Aristotile ed il Gauss avevano escluso l'infinito in atto.

Successivamente, nel 1908, il matematico olandese Brouwer dichiarava innammissibile il principio del terzo escluso (tertium non datur) della logica aristotelica ad insiemi infiniti, sollevando così un'altra grave obiezione alla teoria degli insiemi del Cantor.

Il nuovo indirizzo allo studio dei fondamenti della matematica che ha nel Brouwer e nel Weyl i loro maggiori esponenti è detto intuizionismo, perché in esso viene ammessa soltanto l'intuizione primitiva della numerazione come base della costruzione degli insiemi, mentre viene rifiutato l'infinito attuale.

LAMBERTO MORELLI

ALCUNI GIUDIZI SULL'USO DEL QUESTIONARIO ESPRESSI DAGLI ALUNNI

Penso che in questa valutazione mi debba limitare soprattutto a delle impressioni più che a dare un giudizio vero e proprio, in quanto non conosco la maggior parte dei principi didattici che invece deve possedere un insegnante. Per me il questionario è apprezzabile innanzi tutto per il fatto stesso che è un esperimento; infatti al di là di ogni previsione, che rimane sempre tale, esso può aver effetti pratici di considerevole importanza. Uno dei problemi, che il questionario introdotto come mezzo di giudizio ufficiale, può risolvere, almeno in parte, è quello della carenza del tempo, che si presenta oggi come un avversario vero e proprio per l'insegnante.

Altrettanto importante è la maggiore garanzia di obbiettività che tale mezzo offre sia a chi dà i giudizi sia a chi li riceve, restando tuttavia un sistema un po' meccanico che ha ragione di esistere solo se affiancato all'interrogazione più "umanizzata" e individuale. Questa infatti tende a valutare in particolare le capacità di ogni singolo individuo, a differenza del questionario che le presuppone tutte ad un livello unitario. Positivo è il modo con cui lo stesso presenta i quesiti sugli argomenti già svolti e discussi quotidianamente , per il fatto che li ripropone in modo nuovo. Ciò comporta quindi un maggiore approfondimento della materia al di là degli schemi tradizionali; è in un certo senso come raggiungere la vetta di un monte partendo dal versante opposto a quello che si è già saliti.

Considerando infine che è del tutto sentita, specialmente nei giovani, l'esigenza di un rinnovamento didattico, penso che sia da accogliere di buon grado ogni tentativo diretto a tale scopo e che non rimanga nel limbo delle teorie.

Claudio Burattini Classe 5ª B

E' piuttosto difficile, solo alla luce di poche esperienze dirette, dare un giudizio completo ed esauriente sul "questionario".

Certo, confesso che in un primo tempo non avevo bene accolto questa idea, sia perché non riuscivo a vederne l'utilità, sia perché, soprattutto, non mi trovavo per nulla a mio agio quando dovevo rispondere a un questionario. Mi dava fastidio, per esempio, trovarmi all'improvviso di fronte a quella lista di domande, che sembravano talvolta troppo semplici, e sembravano, proprio per questo, nascondere "tranelli" ad ogni parola. A questo punto sopravveniva l'emozione, che, unita alla paura di sbagliare, e al pensiero del giudizio, giocava spesso dei brutti scherzi. La compilazione del questionario è infatti una cosa molto diversa dal rispendere all'interrogazione, in cui si è in un certo senso aiutati dalla costante assistenza dell'insegnante, e le domande non sono mai poste in forma tanto lapidaria da esigere una risposta altrettanto precisa e concisa.

In seguito, riflettendo meglio, e considerando anche quanto era stato detto dall'insegnante in varie occasioni, sul valore e sulle finalità del questionario, il mio punto di vista è sostanzialmente cambiato.

Mi sono convinto, in una parola, che il questionario non è affatto inutile, anzi, esso serve sia allo studente, sia all'insegnante, e può costituire, quando è ben impiegato, un valido mezzo didattico, e un utile elemento da cui trarre un giudizio, seppure entro certi limiti e con certe riserve.

Secondo me infatti, lo studente, quando è messo di fronte a quelle domande, rispondendo ad esse, non fa che puntualizzare le proprie conoscenze e la propria preparazione su quei dati argomenti. Inoltre può chiarire molti punti rimastigli oscuri, perché spesso le domande del questionario non rappresentano altro che dei dubbi, sopravvenuti già durante lo studio, e ai quali, per una qualsiasi ragione, era mancata la risposta.

Senza contare poi che qualche volta costituisce un vantaggio il fatto di poter pensare con più calma alle risposte da dare.

Dico però "qualche volta", perché molto spesso con la riflessione le cose vengono a complicarsi, sorgono nuovi dubbi, magari infondati o generati dalla inesatta interpretazione di qualche parola o proposizione. Questo dell'apparente ambiguità di molte domande, è, a mio avviso, un fatto molto importante: chi compila le domande del questionario deve sempre tener presente che una frase il cui significato appare chiaro, può assumere significati ambigui. o, peggio, polivalenti, per lo studente, portato, per il carattere stesso della prova, a sottilizzare eccessivamente sulle questioni propostegli.

Tuttavia, nonostante i lievi inconvenienti, mi sembra fuori discussione il valore del questionario in sé, e penso pertanto che esso possa essere per l'insegnante un valido mezzo da cui trarre nuovi elementi di giudizio. Giudizio però che dovrebbe essere fatto con criteri particolari, in modo da dare al questionario una funzione integrativa. Esso infatti per il suo carattere di "test", non può da solo rispecchiare pienamente le capacità di un ragazzo.

Servirà semmai a metterne in evidenza la perspicacia, la prontezza, la memoria, ma non l'intelligenza o la capacità effettiva.

Sarà quindi uno strumento dal quale l'insegnante potrà trarre indicazioni utilissime, e, si badi bene, non solo sul singolo, ma sull'intera classe, poiché oltretutto ne rispecchia l'andamento e il grado di preparazione complessivo.

Gianfranco Morgoni Classe 5ª B

— Distanziate i banchi! C'è da rispondere ad un questionario! —: con tale espressione dell'insegnante è cominciata talvolta l'ora di matematica nel corrente anno scolastico. La esperienza del questionario è stata variamente criticata da noi alunni, a volte forse con troppa precipitazione, quando da qualche momento soltanto quei fogli ciclostilati erano capitati, tanto inattesi, sui nostri banchi. Da una considerazione più obbiettiva, però, la nuova esperienza mi sembra offrire la possibilità di fare alcune interessanti considerazioni.

Il questionario è, anzitutto, un mezzo utile al professore, che, a volte, per la ristrettezza del tempo a sua disposizione, non riesce ad interrogare a sufficienza, soprattutto, poi, quando ha a che fare con una classe particolarmente numerosa.

La serie dei quesiti, inoltre, viene presentata in modo inatteso e permette quindi all'insegnante di valutare quello che l'alunno sa, senza essersi preparato appositamente per una interrogazione che, il più delle volte, non è difficile prevedere.

A volte, il questionario, però, presenta dei punti ambigui, nei quali lo studente si trova in difficoltà, dovendosi comportare in maniera molto concisa.

Rivolgendomi dunque ad un ipotetico insegnante in procinto di usare tale mezzo di indagine, lo esorterei a porre la massima attenzione nel formulare le domande e di usare molto buonsenso nella valutazione, allorché si trovi di fronte a punti ambigui.

I risultati ottenuti dalla nostra classe nei questionari, non sono stati molto diversi da quelli ottenuti nelle comuni prove orali o scritte, come del resto era da attendersi. Questo prova che il questionario è un mezzo rapido e sicuro, di cui il professore può servirsi per rendersi conto del livello di preparazione dei suoi allievi.

Concludendo, dunque, penso che la nuova iniziativa debba essere apprezzata ed incoraggiata, purché. però, si consideri sempre il questionario come mezzo integrativo di un giudizio, ben più determinante, formulato in seguito ad un contatto diretto dell'insegnante con la sua classe.

Roberto Riccioni Classe 5ª B