Alcune considerazioni sulla cinematica dei mezzi continui

Nota del Prof. P. CASTALDO

Il professore Enrico Boggio - Lera, in una sua nota « Sulla Cinematica dei mezzi continui » (Nuovo Cimento vol. XXII e seg. I serie), considerò la deformazione omogenea di 2. grado e ne fece lo studio con mezzi puramente analitici.

Riprendendo le considerazioni del Boggio - Lera, ho fatto con metodo vettoriale lo studio diretto di tre speciali deformazioni di 2. grado -- pure considerate dal Boggio - Lera - (deformazione omogenea di 2. grado a potenziale; deformazione che è il risultato di tre torsioni intorno a rette ortogonali passanti per l'origine delle coordinate; flessione intorno ad una retta passante per l'origine); e poi sempre con metodo vettoriale, ho dimostrato che la più generale deformazione omogenea di 2. grado è, « in un modo unico e ben determinato, » la risultante delle tre deformazioni sopra enunciate.

Si comprende agevolmente che scopo della presente nota è quello di mettere in evidenza la superiorità del metodo vettoriale su quello analitico, in questioni di fisica - matematica. Per ragioni di spazio, mi limito a fare alcune considerazioni di carattere generale sulla deformazione omogenea di 2. grado e poi passo allo studio della deformazione omogenea di 2 grado a potenziale,

1. Sulla deformazione omogenea di 2. grado. - Consideriamo un corpo continuo (a tre dimensioni), supponiamo che tale corpo riceva una deformazione, sia P_1 la posizione del punto generico P dopo avvenuta la deformazione ed **s** lo spostamento, cioè poniamo $\mathbf{s} = P_1 - P$.

Nella Meccanica si considera dapprima il caso della cosidetta deformazione omogenea di 1. grado; il caso cioè in cui le componenti di **s** secondo una terna ortogonale destrogira, siano funzioni omogenee di primo grado delle coordinate del punto P. Precisamente; detto Q un punto dell' intorno di P, Q_1 il corrispondente di Q, posto $Q - P = \mathbf{a}$ e detta α l'omografia di deformazione, si considera il caso in cui si abbia

$$Q_1 - Q = \mathbf{s} + \alpha \mathbf{a}.$$

È noto che in questo caso la deformazione si decompone in un moto di corpo rigido ed in una deformazione omogenea di primo grado con potenziale.

Ora ci proponiamo di considerare un caso più generale; quello cioè in cui nello sviluppo delle componenti di **s** si tenga conto delle quantità del secondo ordine; allora tali componenti si presentano sotto la forma di funzioni di primo e di secondo grado delle coordinate del punto P, ossia della forma

$$u + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + 2 (d_1 yz + e_1 zx + f_1 xy). \text{ (1)}$$

È evidente che in questo caso la deformazione consterà di due parti; una parte corrispondente alle funzioni di primo grado delle coordinate e l'altra corrispondente alle funzioni di secondo grado.

Ci limiteremo allo studio della seconda parte che diremo *deformazione omogenea di 2. grado.*

Le componenti di una tale deformazione, dovendo essere funzioni di 2. grado, le potremo sempre porre sotto questa forma

$$(P - O) \times \sigma_1 (P - O); (P - O) \times \sigma_2 (P - O); (P - O) \times \sigma_3 (P - O)$$

dove σ_1, σ_2, σ_3 indicano delle omografie a coefficienti costanti e che possiamo sempre riguardare come tre dilatazioni.

Infatti, per un noto teorema sulla decomposizione di un'omografia, si ha (2)

$$\sigma_1 = D \sigma_1 + V \sigma_1 \Lambda$$

da cui

$$\sigma_1 (P - O) = D \sigma_1 (P - O) + V \sigma_1 \Lambda (P - O)$$

e quindi

$$(P - O) \times \sigma_1 (P - O) = (P - O) \times D \sigma_1 (P - O) + V \sigma_1 \Lambda (P - O) \times (P - O)$$

ma l'ultimo termine è nullo, perciò

$$(P - O) \times \sigma_1 (P - O) = (P - O) \times D \sigma_1 (P - O).$$

Analogamente si può ragionare per σ_2 e σ_3, ne risulta quindi la legittimità dell' ipotesi.

Dunque l'espressione più generale dello spostamento corrispondente ad una deformazione omogenea di 2. grado, è

$$\text{(1)} \quad \mathbf{s} = (P - O) \times \sigma_1 (P - O). \mathbf{i} + (P - O) \times \sigma_2 (P - O). \mathbf{j} + (P - O) \times \sigma_3 (P - O). \mathbf{k}$$

(1) Per brevità non scriviamo le altre due componenti di forma analoga

(2) Cfr. **C. Burali - Forti** e **R. Marcolongo**: « Analyse vectorielle génerale - Transformations linéaires. » - Lattes - Torino.

dove σ_1, σ_2, σ_3 sono delle dilatazioni affatto arbitrarie ed **i, j, k** tre vettori ortogonali unitari.

2. *Deformazione omogenea di 2. grado a potenziale.*

Diremo che la **s** è a potenziale, quando

$$(2) \qquad \mathrm{rot}\ \mathbf{s} = 0.$$

Cerchiamo di determinare quali condizioni debbono essere soddisfatte, affinchè resti verificata la (2).

Ricordando che essendo **u** un vettore generico ed m un numero reale qualsiasi, si ha

$$\mathrm{rot}\ (m\ \mathbf{u}) = m\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u} + \mathrm{grad}\ m \wedge \mathbf{u}$$ [1]

da (1) si ottiene

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{s} = (P - O) \times \sigma_1 (P - O).\ \mathrm{rot}\ \mathbf{i} + (P - O) \times \sigma_2 (P - O).\ \mathrm{rot}\ \mathbf{j} + (P - O) \times \sigma_3 (P - O).\ \mathrm{rot}\ \mathbf{k} + \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_1 (P - O)\} \wedge \mathbf{i} + \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_2 (P - O)\} \wedge \mathbf{j} + \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_3 (P - O)\} \wedge \mathbf{k}$$

I primi tre termini sono nulli essendo

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{i} = \mathrm{rot}\ \mathbf{j} = \mathrm{rot}\ \mathbf{k} = 0$$

perchè **i, j, k** sono tre vettori unitari costanti; quindi rimane

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{s} = \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_1 (P - O)\} \wedge \mathbf{i} + \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_2 (P - O)\} \wedge \mathbf{j} + \mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_3 (P - O)\} \wedge \mathbf{k}.$$

Ora per la definizione di gradiente si può sempre scrivere

$$d\ \{(P - O) \times \sigma_1 (P - O)\} = \mathbf{a} \times d P$$

cioè

$$\mathrm{grad}\ \{(P - O) \times \sigma_1 (P - O\} = \mathbf{a}.$$

Dalla penultima relazione si ottiene

$$d P \times \sigma_1 (P - O) + (P - O) \times \sigma_1\, d P = \mathbf{a} \times d P$$

---

(1) Ved. Oper. cit.; oppure: **C. Burali - Forti** e **R. Marcolongo** « Elementi di Calcolo vettoriale » - **Zanichelli - Bologna.**

ed essendo σ_1 una dilatazione

$$2\,d\,P \times \sigma_1\,(P - O) = d\,P \times \mathbf{a}$$

da cui per l'arbitrarietà dello spostamento d P, si ricava

$$2\,\sigma_1\,(P - O) = \mathbf{a} = \text{grad}\,\{(P - O) \times \sigma_1\,(P - O)\}.$$

Analogamente si ragiona per gli altri, quindi

$$\text{rot}\,\mathbf{s} = 2\,\sigma_1\,(P - O)\wedge\mathbf{j} + 2\,\sigma_2\,(P - O)\wedge\mathbf{i}$$
$$+ 2\,\sigma_3\,(P - O)\wedge\mathbf{k}$$

Affinchè sia rot $\mathbf{s}$ = o, occorre che

$$\sigma_1(P - O)\wedge\mathbf{i} + \sigma_2(P - O)\wedge\mathbf{j} + \sigma_3(P - O)\wedge\mathbf{k} = O$$

da quest'ultima moltiplicando scalarmente per $\mathbf{i}$ risulta

$$\sigma_2(P - O) \times \mathbf{j}\wedge\mathbf{i} + \sigma_3\,(P - O) \times \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = o$$

ossia

$$\sigma_3\,(P - O) \times \mathbf{j} = \sigma_2\,(P - O) \times \mathbf{k}$$

e per il teorema di commutazione

$$(P - O) \times \sigma_3\,\mathbf{j} = (P - O) \times \sigma_2\,\mathbf{k}$$

Da questa per l'arbitrarietà del vettore P — O si ottiene

$$\sigma_3\,\mathbf{j} = \sigma_2\,\mathbf{k}$$

A risultati analoghi si giunge moltiplicando scalarmente per $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, quindi

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \sigma_3\,\mathbf{j} = \sigma_2\,\mathbf{k} \\ \sigma_1\,\mathbf{k} = \sigma_3\,\mathbf{i} \\ \sigma_2\,\mathbf{i} = \sigma_1\,\mathbf{j} \end{cases}$$

Quando si verificano le (I) il rot $\mathbf{s}$ è nullo, quindi esse danno le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la deformazione di secondo grado abbia un potenziale.

Di guisa che se le (I) restano verificate potremo sempre scrivere

$$(3) \qquad \mathbf{s} = \text{grad}\,\varphi,$$

dove φ è una funzione a determinarsi.

NOTA — Dopo di ciò, nel mio lavoro, prima di prendere a studiare le altre due speciali deformazioni di 2. grado, mi occupo di determinare in coordinate cartesiane la funzione φ, che risulta funzione omogenea di 3. grado nelle coordinate x, y, z del punto P.

Per le ragioni dette rimando ad altra occasione la pubblicazione della rimanente parte del mio lavoro.

INDICE

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA