LE COORDINATE MERCATORIANE

Molte volte si presentano problemi geofisici nei quali è richiesto l'uso di coordinate riferite ad una superficie, che normalmente è quella della Terra considerata sferica.

E' ad esempio il caso dello studio della equazione della vorticità nelle ciclogenesi, ove la introduzione di coordinate riferite alla superficie terrestre semplifica il problema notevolmente.

Se è data una sfera di raggio R, assunto come unitario per comodità di ragionamento, l'elemento di lunghezza d'arco è data dalla notissima relazione

$$ds^2 = d\varphi^2 + d\lambda^2 \cos^2 \varphi \qquad (1)$$

ove φ è la latitudine e λ la longitudine di un punto della Terra.

Se con μ si indica la coordinata rettangolare verticale della carta cilindrica mercatoriana (lat. crescente) essa definita, come noto, attraverso la relazione caratteristica

$$d\mu = d\,\varphi \sec \varphi \qquad (2)$$

e quindi la (1) diviene

$$ds^2 = \cos^2\varphi \,(d\varphi^2 + d\mu^2) \qquad (3)$$

La equazione (2) convenientemente integrata consente di determinare le relazioni intercorrente fra μ e φ.

Tali relazioni possono essere scritte:

$$\begin{array}{ll} \tan \varphi = \operatorname{sech} \mu & \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{tangh} \mu \\ \sec \varphi = \cosh \mu & \cos \varphi = \operatorname{sech} \mu \end{array} \qquad (4)$$

come è facile verificare (Nota).

Sostituendo nella (3) si ha

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2\mu \,(a\lambda^2 + d\mu^2) \qquad (5)$$

espressione dell'elemento d'arco nel sistema mercatoriano di coordinate.

E' bene notare che le espressioni (4) possono assai più rapidamente essere calcolate introducendo il gudermaniano.

Infatti esse possono essere simbolicamente scritte $\varphi = \mathrm{gd}\,\mu$ e calcolate con le apposite tavole.

Le coordinate mercatoriane hanno, rispetto alle coordinate polari vantaggi diversi e notevoli. Esse possono trasformarsi in coordinate cartesiane, la cui espressione diviene facilmente

$$\begin{cases} X = R \operatorname{sech} \mu \cos \lambda \\ Y = R \operatorname{sech} \mu \operatorname{sen} \lambda \\ Z = R \operatorname{tangh} \mu \end{cases} \qquad (6)$$

quando il raggio terrestre sia R ed avendo assunto come terna di riferimento la seguente (triedro positivo): asse X diretto ad Est, asse Y diretto a Nord, asse Z allo zenith. I versori secondo questi assi divengono pertanto:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -\bar{i} \operatorname{sen} \lambda + \bar{j} \cos \lambda \\ \bar{b} &= -\bar{i} \cos \lambda \operatorname{tangh} \mu - \bar{j} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tangh} \mu + \bar{k} \operatorname{sech} \mu \qquad (7) \\ \bar{c} &= \bar{i} \cos \lambda \operatorname{sech} \mu + \bar{j} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sech} \mu + \bar{k} \operatorname{tangh} \mu \end{aligned}$$

i quali conservano la ortogonalità e per essi quindi valgono le ralazioni

$$\begin{aligned} &\bar{a} \times \bar{a} = 1 \quad \bar{b} \times \bar{b} = 1 \quad \bar{c} \times \bar{c} = 1 \\ &\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a} = 0 \qquad (8) \\ &\bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{c} \quad \bar{b} \wedge \bar{c} = \bar{a} \quad \bar{c} \wedge \bar{a} = \bar{b}. \end{aligned}$$

Infatti:

$$\bar{a} \times \bar{a} = (-\bar{i} \operatorname{sen} \lambda + \bar{j} \cos\lambda) \times (-\bar{i} \operatorname{sen}\lambda + \bar{j} \cos\lambda) = 1$$

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = (-\bar{i} \operatorname{sen}\lambda + \bar{j} \cos\lambda) \wedge (-\bar{i} \cos \lambda \operatorname{tangh} \lambda - \bar{j} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tangh} \mu + \bar{k} \operatorname{sech}\mu) = \bar{i} \cos \lambda \operatorname{sech}\mu + \bar{j} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sech} \lambda + \bar{k} \operatorname{tangh} \mu = \bar{c}$$

(Nota) $\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C$ ma

$d\,\mu = \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi}$ e pertanto $\mu = \ln \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C$ da cui

$C^{\mu} = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C$ e svolgendo il II membro

$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{C^{\mu} - 1}{C^{\mu} + 1}$ a meno di costanti da cui si conclude il valore di

$\operatorname{tang} \varphi = \frac{C^{\mu} - C^{\mu}}{2} = \operatorname{sen h} \mu$

E' interessante determinare il gradiente e la forma assunta dall'operatore laplaciano, tenuto conto che i vettori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, sono funzioni di R, λ, φ,. Le derivate parziali sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial \lambda} = (-\bar{i} \cos\lambda - \bar{j} \operatorname{sen}\lambda) \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial \lambda} = \operatorname{tangh}\mu\,(\bar{i} \operatorname{sen}\lambda - \bar{j} \cos\lambda) = -\bar{a} \tanh\mu \\ \dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \lambda} = \operatorname{sech}\mu\,(-\bar{i} \operatorname{sen}\lambda + \bar{j} \cos\lambda) = \bar{a} \operatorname{sech}\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial \mu} = -\bar{c} \operatorname{sech}\mu \\ \dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \mu} = \bar{b} \operatorname{sech}\mu \end{cases} \tag{9}$$

Se ϑ (x,y,z,) = 0 è la funzione del punto della superficie terrestre in coordinate cartesiane, scelte secondo le (6) si avrà semplicemente

$$\overline{\operatorname{grad}}\ \vartheta = \nabla\vartheta = \frac{1}{r} \cosh\mu \left[\bar{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} + \bar{b} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda}\right] + \bar{c}\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \tag{10}$$

$$\nabla^2\vartheta = \left(\frac{1}{r} \cosh\mu\right)^2 \left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial \mu^2}\right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) \tag{11}$$

dalle quali è facile ricavare tutte le altre operazioni vettoriali sovrapposte conseguenti alle precedenti (divergenza, rotore etc.).

Svariate applicazioni si possono fare delle coordinate mercatoriane; in particolare esprimere le equazioni della convergenza e della vorticità nel caso della ciclogenesi sia in meteorologia che in oceanografia.

In ognuna di queste applicazioni esse hanno il pregio notevole di semplificare le espressioni matematiche rendendole assi più maneggevoli e di più immediata comprensione. In particolare potranno essere risolti mediante tali coordinate tutti quei problemi nei quali sono da considerarsi superficie di livello sferiche; in tale caso le coordinate mercatoriane semplificano i problemi in maniera veramente notevole.

Ad esempio, nel caso del moto di una particella per convezione, senza rotazione, la equazione riferita a superficie di livello piane può essere scritta:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \delta \tag{12}$$

ove U indica la velocità, mentre la divergenza è

$$\delta = \frac{1}{Co} \frac{\partial}{\partial z} (Co\ w)$$

e le componenti cartesiane della velocità sono:

$$\begin{cases} Ux = -\dfrac{d\vartheta}{dy} - \dfrac{dU}{dx} \\ Uy = +\dfrac{d\vartheta}{dz} - \dfrac{dU}{dy} \\ Uz = W \end{cases}$$

Volendo applicare le coordinate mercatoriane la (12) diviene:

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \frac{d^2u}{d\mu^2} = r^2 \ (\text{sec}\, h^2\, \mu)\ \delta$$

ove la divergenza verticale $\delta = \dfrac{1}{Co\, r^2} \dfrac{d}{dr} (Co\, r^2 w)$ e

$$\begin{cases} \bar{Ua} = \dfrac{\cosh \mu}{r}\left(-\dfrac{d\vartheta}{d\mu} - \dfrac{du}{d\lambda}\right) \\ \bar{Ub} = \dfrac{\cosh \mu}{r}\left(\dfrac{d\vartheta}{d\lambda} - \dfrac{du}{d\mu}\right) \\ \bar{Uc} = W \end{cases}$$

Le equazioni espresse in questa nuova forma sono di più semplice interpretazione e soprattutto consentono un utile confronto con le equazioni analoghe relative alla superficie sferica, accentuando le analogie formali. Il precedente è solo uno dei tanti casi che si presentano nei problemi geofisici teorici ed applicati; altre utili applicazioni potrebbero essere fatte ai moti delle molecole di un gas, nello studio della termodinamica, esprimendo le equazioni del moto in maniera assai semplice.

Altri problemi che potranno essere indagati con tale metodo matematico sono quelli relativi allo studio dei moti di ioni nella ionostera, come pure della statica e dinamica delle masse oceaniche.

ALFREDO MURRI

BIBLIOGRAFIA

M. Boll — Tables numériques Universelles
Eckart — Hydrodinamics of Oceans and atmosphere
Eredia — Lezioni di Meteorologia ed aerologia
T. Malone — Compendium of meteorology
Defant — Physical Oceanography
Haltiner and Martin — Dynamical and Physical Meteorology
Defant A and Fr. — Physikalische Dynamik der atmosphäre
Raethjen — Dynamik der Zyclonen